
Recueil d'exercices de réflexion

Chapitre : Probabilités

1 Modélisation et probabilités conditionnelles

Exercice 1. Dépistage d'une maladie Une maladie touche 0,5% de la population. Un test de dépistage est mis au point.

- Si une personne est malade, le test est positif dans 98% des cas (sensibilité).
- Si une personne n'est pas malade, le test est négatif dans 97% des cas (spécificité).

On choisit une personne au hasard dans la population et on lui fait passer le test.

- a) Représenter la situation par un arbre pondéré en définissant clairement les événements.
- b) Calculer la probabilité que le test soit positif.
- c) Une personne reçoit un test positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit réellement malade ? Commenter ce résultat.
- d) Une personne reçoit un test négatif. Quelle est la probabilité qu'elle soit réellement malade ?

Exercice 2. Jeu de dés successifs Deux joueurs, Alice et Bob, jouent à un jeu avec un dé équilibré à six faces. Alice lance le dé en premier. Si elle obtient un 6, elle gagne. Sinon, Bob lance le dé. S'il obtient un 6, il gagne. Sinon, Alice relance le dé, et ainsi de suite. Les lancers sont indépendants.

- a) Soit A_n l'événement "Alice gagne au n -ième lancer" et B_n l'événement "Bob gagne au n -ième lancer". Que représente n ?
- b) Calculer la probabilité que Alice gagne au premier lancer.
- c) Calculer la probabilité que Bob gagne au deuxième lancer (c'est-à-dire Bob gagne après le premier lancer d'Alice).
- d) Calculer la probabilité que Alice gagne la partie.
- e) Calculer la probabilité que Bob gagne la partie.

Exercice 3. Fiabilité d'un système Un système est composé de trois sous-systèmes S_1, S_2, S_3 fonctionnant indépendamment. La probabilité que S_1 fonctionne est $P(S_1) = 0.9$. La probabilité que S_2 fonctionne est $P(S_2) = 0.8$. La probabilité que S_3 fonctionne est $P(S_3) = 0.7$.

- a) Le système est en série : il fonctionne si et seulement si les trois sous-systèmes fonctionnent. Calculer la probabilité que le système fonctionne.
- b) Le système est en parallèle : il fonctionne si et seulement si au moins un des sous-systèmes fonctionne. Calculer la probabilité que le système fonctionne.
- c) Le système est conçu de la manière suivante : S_1 et S_2 sont montés en parallèle, et ce bloc est ensuite monté en série avec S_3 . Calculer la probabilité que le système fonctionne.
- d) Proposer une architecture (montage série, parallèle ou mixte) de ces trois sous-systèmes qui maximise la probabilité de fonctionnement du système global. Justifier votre choix.

2 Variables aléatoires et lois à densité

Exercice 1. Durée de vie conditionnelle La durée de vie X (en heures) d'un composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.0005$.

- Calculer la durée de vie moyenne de ce composant.
- Calculer la probabilité que le composant ait une durée de vie supérieure à 2000 heures.
- Le composant a déjà fonctionné pendant 1000 heures sans défaillance. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne encore au moins 1000 heures de plus ? Commenter le résultat.
- Quelle est la probabilité que le composant tombe en panne entre 500 heures et 1500 heures ?

Exercice 2. Optimisation d'un temps d'attente Un artisan se rend chaque jour chez un fournisseur. Le temps d'attente T (en minutes) avant d'être servi est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 10]$. L'artisan estime son coût d'attente à 2 euros par minute. S'il attend plus de 7 minutes, il subit un coût supplémentaire de 5 euros pour "perte de temps de travail".

- Calculer la probabilité que l'artisan attende plus de 7 minutes.
- On note C la variable aléatoire représentant le coût total de l'attente pour l'artisan. Exprimer C en fonction de T .
- Calculer l'espérance du coût total de l'attente.
- Le fournisseur propose un nouveau système pour réduire l'attente : le temps d'attente suit alors une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.2$. Calculer la nouvelle espérance du coût total de l'attente. Est-ce un avantage pour l'artisan ? Justifier.

Exercice 3. Fabrication et tolérance Une machine fabrique des pièces dont le diamètre D (en mm) suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Les tolérances de fabrication exigent que le diamètre soit compris entre 9.9 mm et 10.1 mm. On sait que 95% des pièces ont un diamètre compris entre 9.85 mm et 10.15 mm.

- Déterminer les paramètres μ et σ de la loi normale.
- Calculer la probabilité qu'une pièce choisie au hasard soit conforme (c'est-à-dire dans l'intervalle $[9.9, 10.1]$).
- Le coût de production d'une pièce conforme est de 2 euros. Une pièce non conforme doit être retravaillée à un coût de 5 euros. Quel est le coût moyen par pièce produite ?
- Pour réduire le nombre de pièces non conformes, on peut ajuster la machine pour réduire l'écart-type σ sans changer la moyenne μ . Quelle valeur de σ faut-il atteindre pour que 99% des pièces soient conformes ?

3 Problèmes de synthèse

Exercice 1. Jeu de roulette modifié Une roulette est divisée en secteurs de différentes couleurs : 40% sont verts, 30% sont bleus et 30% sont rouges. Les règles du jeu sont les suivantes :

- Si la bille tombe sur le vert, le joueur gagne 10 euros.
- Si la bille tombe sur le bleu, le joueur rejoue une deuxième fois.
 - Si la deuxième fois la bille tombe sur le vert, le joueur gagne 5 euros.
 - Si la deuxième fois elle tombe sur le bleu, le joueur perd 5 euros.
 - Si la deuxième fois elle tombe sur le rouge, le joueur perd 10 euros.
- Si la bille tombe sur le rouge, le joueur perd 5 euros.

- a) Modéliser la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
- b) Calculer la probabilité que le joueur gagne de l'argent (gain strictement positif).
- c) Calculer la probabilité que le joueur perde de l'argent (gain strictement négatif).
- d) Soit G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Déterminer la loi de probabilité de G .
- e) Calculer l'espérance de G . Le jeu est-il favorable au joueur ?

Exercice 2. Contrôle de qualité en série Une entreprise fabrique des composants électroniques. Chaque composant est soumis à deux contrôles successifs et indépendants : un contrôle visuel (C_V) et un contrôle fonctionnel (C_F).

- Le contrôle visuel détecte 98% des défauts visuels. 5% des composants ont un défaut visuel.
- Le contrôle fonctionnel détecte 95% des défauts fonctionnels. 3% des composants ont un défaut fonctionnel.
- On considère que les défauts visuels et fonctionnels sont indépendants.

Un composant est déclaré "bon" s'il passe les deux contrôles sans être détecté défectueux.

- a) Calculer la probabilité qu'un composant ait un défaut visuel et soit détecté par le contrôle visuel.
- b) Calculer la probabilité qu'un composant n'ait pas de défaut visuel mais soit détecté par le contrôle visuel (faux positif).
- c) Calculer la probabilité qu'un composant soit déclaré bon par le contrôle visuel (c'est-à-dire non détecté défectueux visuellement).
- d) Calculer la probabilité qu'un composant soit déclaré bon au final (après les deux contrôles).
- e) Sachant qu'un composant a été déclaré bon, quelle est la probabilité qu'il ait un défaut visuel qui n'a pas été détecté ? Commenter.