
Recueil d'exercices d'application

Chapitre : Probabilités

1 Probabilités conditionnelles et indépendance

1.1 Calcul de probabilités conditionnelles

1. **Lancer de dé** On lance un dé équilibré à six faces.
 - a) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair, sachant qu'on a obtenu un nombre supérieur à 3 ?
 - b) Quelle est la probabilité d'obtenir un multiple de 3, sachant qu'on a obtenu un nombre impair ?
2. **Sondage en entreprise** Dans une entreprise, 60% des employés sont des femmes. Parmi les femmes, 30% sont cadres. Parmi les hommes, 40% sont cadres. On choisit un employé au hasard.
 - a) Quelle est la probabilité que l'employé choisi soit une femme cadre ?
 - b) Quelle est la probabilité que l'employé choisi soit un homme cadre ?
 - c) Un employé est cadre. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?
3. **Urnes et boules** Une urne U_1 contient 3 boules rouges et 2 boules noires. Une urne U_2 contient 1 boule rouge et 4 boules noires. On choisit une urne au hasard (avec une probabilité de 0.5 pour chaque urne), puis on tire une boule de l'urne choisie.
 - a) Calculer la probabilité de tirer une boule rouge de l'urne U_1 .
 - b) Calculer la probabilité de tirer une boule noire de l'urne U_2 .
 - c) Calculer la probabilité de tirer une boule rouge.
 - d) On a tiré une boule rouge. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1 ?

1.2 Indépendance d'événements

1. **Cartes** On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes bien mélangé. Soit A l'événement "la carte est un As". Soit B l'événement "la carte est rouge (cœur ou carreau)". Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.
2. **Pièce et dé** On lance une pièce de monnaie équilibrée et un dé équilibré à six faces. Soit P l'événement "obtenir Pile". Soit S_3 l'événement "obtenir un score supérieur ou égal à 3". Les événements P et S_3 sont-ils indépendants ? Justifier.
3. **Contrôle qualité** Dans une usine, on a constaté que 5% des produits fabriqués ont un défaut de type A, et 3% ont un défaut de type B. On sait de plus que 0.15% des produits ont les deux types de défauts. Soit A l'événement "le produit a un défaut de type A". Soit B l'événement "le produit a un défaut de type B". Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.

2 Répétition d'expériences identiques et indépendantes

2.1 Loi binomiale

1. **QCM** Un QCM comporte 10 questions. Pour chaque question, 4 réponses sont proposées, dont une seule est juste. Un élève répond au hasard à toutes les questions. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses.
 - a) Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
 - b) Calculer la probabilité que l'élève ait exactement 3 bonnes réponses.
 - c) Calculer la probabilité que l'élève ait au moins 8 bonnes réponses.
 - d) Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.
2. **Sportif et lancers francs** Un basketteur réussit ses lancers francs avec une probabilité de 0.75. Lors d'un entraînement, il effectue une série de 8 lancers francs, considérés comme indépendants. Soit N la variable aléatoire désignant le nombre de lancers francs réussis.
 - a) Quelle est la loi suivie par N ? Préciser ses paramètres.
 - b) Calculer $P(N = 6)$.
 - c) Calculer la probabilité qu'il réussisse au plus 5 lancers francs.
 - d) Calculer la probabilité qu'il réussisse entre 4 et 7 lancers francs (inclus).
3. **Production de pièces** Une machine produit des pièces. La probabilité qu'une pièce soit défectueuse est de 0.02. On prélève au hasard un échantillon de 50 pièces produites par cette machine. La production est suffisamment importante pour que l'on puisse considérer les prélèvements comme indépendants. Soit D la variable aléatoire représentant le nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon.
 - a) Déterminer la loi de probabilité de D .
 - b) Calculer la probabilité que l'échantillon contienne exactement 2 pièces défectueuses.
 - c) Calculer la probabilité que l'échantillon contienne au moins une pièce défectueuse.
 - d) Calculer l'espérance et l'écart-type de D .

3 Loïs de probabilité à densité

3.1 Loi uniforme

1. **Temps d'attente** Un événement se produit de manière aléatoire entre 10h00 et 10h30. On modélise le temps d'attente X (en minutes) à partir de 10h00 par une variable aléatoire suivant une loi uniforme.
 - a) Préciser l'intervalle sur lequel X suit une loi uniforme et donner sa fonction de densité.
 - b) Calculer la probabilité que l'événement se produise avant 10h10.
 - c) Calculer la probabilité que l'événement se produise entre 10h15 et 10h20.
 - d) Quelle est la durée d'attente moyenne?
2. **Génération de nombres aléatoires** Un programme informatique génère un nombre réel X au hasard dans l'intervalle $[0, 5]$. On admet que X suit une loi uniforme sur cet intervalle.
 - a) Quelle est la probabilité que X soit inférieur à 1.5?
 - b) Quelle est la probabilité que X soit compris entre 2.2 et 4.8?
 - c) Quelle est la valeur de x_0 telle que $P(X \leq x_0) = 0.7$?

3.2 Loi exponentielle

1. **Durée de vie d'un appareil** La durée de vie T (en années) d'un certain type d'appareil est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.125$.
 - a) Quelle est la durée de vie moyenne d'un tel appareil ?
 - b) Calculer la probabilité qu'un appareil fonctionne pendant moins de 5 ans.
 - c) Calculer la probabilité qu'un appareil fonctionne pendant plus de 8 ans.
 - d) Sachant qu'un appareil fonctionne déjà depuis 3 ans, quelle est la probabilité qu'il fonctionne encore 2 ans de plus ? (propriété d'absence de mémoire)
2. **Temps d'attente à un guichet** Le temps d'attente X (en minutes) à un guichet est modélisé par une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.5$.
 - a) Quelle est la probabilité qu'un client attende moins de 1 minute ?
 - b) Quelle est la probabilité qu'un client attende plus de 3 minutes ?
 - c) Déterminer le temps d'attente médian (valeur m telle que $P(X \leq m) = 0.5$).

3.3 Loi normale

1. **Taille des individus** La taille des femmes adultes dans une certaine population est modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 165$ cm et d'écart-type $\sigma = 6$ cm.
 - a) Calculer la probabilité qu'une femme choisie au hasard mesure entre 160 cm et 170 cm.
 - b) Calculer la probabilité qu'une femme mesure plus de 175 cm.
 - c) Calculer la probabilité qu'une femme mesure moins de 155 cm.
2. **Production industrielle** Le poids d'un paquet de sucre produit par une machine est une variable aléatoire P qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 1000$ grammes et d'écart-type $\sigma = 5$ grammes.
 - a) Quelle est la probabilité qu'un paquet pèse entre 990 g et 1010 g ?
 - b) Un paquet est considéré comme non conforme s'il pèse moins de 988 g ou plus de 1012 g. Quelle est la probabilité qu'un paquet soit non conforme ?
 - c) Déterminer l'intervalle centré en la moyenne $[1000 - a, 1000 + a]$ tel que la probabilité qu'un paquet ait un poids dans cet intervalle soit de 95%.
3. **Approximation d'une loi binomiale par une loi normale** Un fabricant produit des puces électroniques. La probabilité qu'une puce soit défectueuse est $p = 0.05$. On prélève un lot de 200 puces. Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de puces défectueuses dans le lot.
 - a) Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
 - b) Vérifier les conditions permettant d'approximer cette loi binomiale par une loi normale. Préciser les paramètres μ et σ de cette loi normale d'approximation.
 - c) En utilisant l'approximation par la loi normale, estimer la probabilité qu'il y ait entre 8 et 12 puces défectueuses (inclus) dans le lot. (On pourra utiliser la correction de continuité si la calculatrice ne gère pas directement l'approximation pour des valeurs discrètes).