

Polycopié de Cours : Géométrie dans l'espace

Terminales Spécialité Mathématiques

Juin 2025

Table des matières

1	Vecteurs, droites et plans de l'espace	2
1.1	Coordonnées dans l'espace	2
1.2	Opérations sur les vecteurs	2
1.3	Vecteurs colinéaires et points alignés	2
1.4	Vecteurs coplanaires et points coplanaires	3
1.5	Représentations de droites et de plans	3
1.5.1	Représentation paramétrique d'une droite	3
1.5.2	Représentation cartésienne d'un plan	4
1.5.3	Position relative de droites et de plans	5
2	Produit scalaire dans l'espace	7
2.1	Définitions et propriétés	7
2.2	Orthogonalité	7
2.2.1	Vecteur normal à un plan	8
2.3	Distance d'un point à un plan	8
2.4	Projection orthogonale	9
3	Transformations affines de l'espace	10
3.1	Translation	10
3.2	Homothétie	10
3.3	Rotation (cas simples)	11

1 Vecteurs, droites et plans de l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Cela signifie que les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont unitaires et orthogonaux deux à deux.

1.1 Coordonnées dans l'espace

Définition

Un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées (x_M, y_M, z_M) telles que $O\vec{M} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k}$.

Un vecteur $\vec{u}$ est repéré par ses coordonnées (x, y, z) telles que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Propriété

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace. Les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$ sont $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.

La norme du vecteur $\vec{AB}$, notée $\|\vec{AB}\|$, représente la distance AB et est donnée par : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Remarque

La norme d'un vecteur $\vec{u}(x, y, z)$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1.2 Opérations sur les vecteurs

Propriété

Soient $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ deux vecteurs de l'espace, et k un nombre réel.

- Les coordonnées du vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ sont $(x + x', y + y', z + z')$.
- Les coordonnées du vecteur $k\vec{u}$ sont (kx, ky, kz) .

1.3 Vecteurs colinéaires et points alignés

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ (ou $\vec{u} = k\vec{v}$). Graphiquement, cela signifie qu'ils ont la même direction.

Propriété

Soient $\vec{u}(x, y, z)$ un vecteur non nul et $\vec{v}(x', y', z')$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que $x' = kx$, $y' = ky$ et $z' = kz$. Si aucune des coordonnées de $\vec{u}$ n'est nulle, cela revient à dire que $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = k$.

Point de méthode

Pour montrer que trois points A, B, C sont alignés :

- Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ (ou $\vec{BC}$).
- Vérifier si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires. Si oui, les points sont alignés.

Exemple

Soient $A(1, 2, 3)$, $B(3, 4, 7)$ et $C(-1, 0, -1)$. Les points A, B, C sont-ils alignés ?

- Calculons les coordonnées de $\vec{AB}$: $\vec{AB}(3 - 1, 4 - 2, 7 - 3) = \vec{AB}(2, 2, 4)$.
- Calculons les coordonnées de $\vec{AC}$: $\vec{AC}(-1 - 1, 0 - 2, -1 - 3) = \vec{AC}(-2, -2, -4)$.
- On observe que $\vec{AC} = -1 \times \vec{AB}$. Donc, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.

Conclusion : Les points A, B, C sont alignés.

1.4 Vecteurs coplanaires et points coplanaires

Définition

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires si, ramenés à la même origine, ils sont situés dans un même plan.

Propriété

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si l'un d'eux peut s'écrire comme combinaison linéaire des deux autres. C'est-à-dire, s'il existe des réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Point de méthode

Pour montrer que quatre points A, B, C, D sont coplanaires :

- Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$.
- Vérifier si ces trois vecteurs sont coplanaires. Autrement dit, chercher s'il existe des réels a et b tels que $\vec{AD} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$. Si oui, les points sont coplanaires.

Exemple

Soient $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ et $D(1, 1, 1)$. Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires ?

- $\vec{AB}(-1, 1, 0)$
- $\vec{AC}(-1, 0, 1)$
- $\vec{AD}(0, 1, 1)$
- Cherchons a, b tels que $\vec{AD} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$: $(0, 1, 1) = a(-1, 1, 0) + b(-1, 0, 1)$ Ce qui

$$\text{donne le système : } \begin{cases} 0 = -a - b \\ 1 = a \\ 1 = b \end{cases} \quad \text{De la deuxième et troisième équations, on a } a = 1 \text{ et } b = 1.$$

Substituons dans la première équation : $0 = -1 - 1 = -2$. Ceci est faux ($0 \neq -2$).

Conclusion : Il n'existe pas de tels réels a et b . Les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ ne sont pas coplanaires, donc les points A, B, C, D ne sont pas coplanaires.

1.5 Représentations de droites et de plans

1.5.1 Représentation paramétrique d'une droite

Définition

Une droite D dans l'espace est définie par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u}(a, b, c)$ non nul. Un point $M(x, y, z)$ appartient à la droite D si et seulement si les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Propriété

La droite D passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a, b, c)$ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

Le paramètre t est un réel.

Point de méthode

Pour déterminer une représentation paramétrique d'une droite :

- Identifier un point de la droite.
- Identifier un vecteur directeur de la droite.
- Écrire le système d'équations paramétriques en utilisant les coordonnées du point et du vecteur.

Exemple

Donner une représentation paramétrique de la droite D passant par $A(1, -2, 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2, 0, -1)$. Un point $M(x, y, z)$ appartient à D si $\vec{AM} = t\vec{u}$ pour un certain $t \in \mathbb{R}$. Les coordonnées de $\vec{AM}$ sont $(x - 1, y - (-2), z - 3) = (x - 1, y + 2, z - 3)$. Donc, on a :

$$\begin{cases} x - 1 = 2t \\ y + 2 = 0t \\ z - 3 = -t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

Remarque

Une droite admet une infinité de représentations paramétriques, car on peut choisir n'importe quel point de la droite et n'importe quel vecteur colinéaire au vecteur directeur donné.

1.5.2 Représentation cartésienne d'un plan**Définition**

Un plan P dans l'espace est défini par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et deux vecteurs directeurs $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ non colinéaires. Un point $M(x, y, z)$ appartient au plan P si et seulement si les vecteurs $\vec{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.

Propriété

Tout plan P de l'espace admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$, où a, b, c, d sont des réels, et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Le vecteur $\vec{n}(a, b, c)$ est un vecteur normal au plan P , c'est-à-dire qu'il est orthogonal à tout vecteur contenu dans le plan.

Point de méthode

Pour déterminer une équation cartésienne d'un plan :

- Si le plan est défini par trois points A, B, C non alignés :
 1. Calculer les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
 2. Soit $\vec{n}(a, b, c)$ un vecteur normal au plan. Alors $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$. Cela donne un système d'équations en a, b, c .
 3. Une fois $\vec{n}(a, b, c)$ trouvé, l'équation du plan est $ax + by + cz + d = 0$.
 4. Utiliser un des points (par exemple A) pour trouver d en remplaçant x, y, z par ses coordonnées.
- Si le plan est défini par un point A et un vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$:
 1. L'équation du plan est $ax + by + cz + d = 0$.
 2. Le point $A(x_A, y_A, z_A)$ appartient au plan, donc $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$. On en déduit $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$.

Exemple

Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par $A(1, 2, 0)$, $B(2, 1, 1)$ et $C(0, 3, 1)$.

- Calculons les vecteurs $\vec{AB}(1, -1, 1)$ et $\vec{AC}(-1, 1, 1)$.
- Soit $\vec{n}(a, b, c)$ un vecteur normal au plan P . $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \Rightarrow a - b + c = 0$ (L_1) $\vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \Rightarrow -a + b + c = 0$ (L_2)
- $(L_1) + (L_2) \Rightarrow 2c = 0 \Rightarrow c = 0$.
- En remplaçant $c = 0$ dans (L_1) , on a $a - b = 0 \Rightarrow a = b$.
- Choisissons par exemple $a = 1$. Alors $b = 1$ et $c = 0$. Donc $\vec{n}(1, 1, 0)$.
- L'équation du plan est $x + y + 0z + d = 0$, soit $x + y + d = 0$.
- Le point $A(1, 2, 0)$ appartient au plan, donc $1 + 2 + d = 0 \Rightarrow 3 + d = 0 \Rightarrow d = -3$.

Conclusion : Une équation cartésienne du plan P est $x + y - 3 = 0$.

1.5.3 Position relative de droites et de plans

Il est essentiel de savoir déterminer si des droites sont parallèles, sécantes, confondues, ou si une droite est incluse dans un plan, parallèle à un plan, ou sécante à un plan.

Point de méthode

Position relative de deux droites D_1 et D_2 : Soient D_1 de vecteur directeur $\vec{u}_1$ et D_2 de vecteur directeur $\vec{u}_2$.

- **1^{er} cas : $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires.** Les droites D_1 et D_2 sont parallèles. Pour savoir si elles sont confondues, il suffit de vérifier si un point de D_1 appartient à D_2 .
 - Si $A_1 \in D_2$, alors D_1 et D_2 sont confondues.
 - Si $A_1 \notin D_2$, alors D_1 et D_2 sont strictement parallèles.
- **2^e cas : $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires.** Les droites sont sécantes ou non coplanaires. Pour savoir si elles sont sécantes, on cherche si leurs représentations paramétriques admettent une solution commune.
 - S'il existe une solution unique, les droites sont sécantes en un point.
 - S'il n'y a pas de solution, les droites sont non coplanaires.

Point de méthode

Position relative d'une droite D et d'un plan P : Soit D de vecteur directeur $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ et P d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ (avec vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$).

- **1^{er} cas : $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux ($\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$).** La droite D est parallèle au plan P . Pour savoir si elle est incluse dans le plan, il suffit de vérifier si un point de D appartient à P .
 - Si $A \in P$ (où A est un point de D), alors D est incluse dans P .
 - Si $A \notin P$, alors D est strictement parallèle à P .
- **2^e cas : $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux ($\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$).** La droite D est sécante au plan P . On trouve le point d'intersection en substituant les expressions paramétriques de x, y, z de la droite dans l'équation du plan.

Point de méthode

Position relative de deux plans P_1 et P_2 : Soient P_1 d'équation $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ (vecteur normal $\vec{n}_1(a_1, b_1, c_1)$) et P_2 d'équation $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ (vecteur normal $\vec{n}_2(a_2, b_2, c_2)$).

- **1^{er} cas : $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires.** Les plans P_1 et P_2 sont parallèles. Pour savoir si elles sont confondues, il suffit de vérifier si un point de P_1 appartient à P_2 .
 - Si $A \in P_2$ (où A est un point de P_1), alors P_1 et P_2 sont confondus.
 - Si $A \notin P_2$, alors P_1 et P_2 sont strictement parallèles.
- **2^e cas : $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires.** Les plans P_1 et P_2 sont sécants selon une droite. Pour trouver l'équation de cette droite, on résout le système formé par les deux équations cartésiennes.

2 Produit scalaire dans l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2.1 Définitions et propriétés

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

- **Définition géométrique :** Si $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$, alors le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est défini par : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$. Si l'un des vecteurs est nul, le produit scalaire est nul.
- **Définition analytique :** Si $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$, alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Remarque

Ces deux définitions sont équivalentes. La définition analytique est particulièrement utile pour les calculs.

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace et tout réel k :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (symétrie)
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (linéarité à gauche)
- $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ (homogénéité)
- $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$ (carré scalaire)

Théorème

Identité remarquable

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$:

- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

2.2 Orthogonalité

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul ($\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$).

Remarque

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs non nuls, leur orthogonalité signifie que les directions qu'ils définissent sont perpendiculaires.

Propriété

- Deux droites D_1 et D_2 sont orthogonales si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.
- Une droite D est orthogonale à un plan P si un vecteur directeur de D est colinéaire à un vecteur normal de P .
- Deux plans P_1 et P_2 sont orthogonaux si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

2.2.1 Vecteur normal à un plan

Propriété

Soit P un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$. Le vecteur $\vec{n}(a, b, c)$ est un vecteur normal au plan P .

Point de méthode

Pour déterminer si une droite D (vecteur directeur $\vec{u}$) est orthogonale à un plan P (vecteur normal $\vec{n}$) :

- Vérifier si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

Pour déterminer si une droite D est parallèle à un plan P :

- Vérifier si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux (leur produit scalaire est nul).

Exemple

Soit le plan P d'équation $2x - y + 3z - 5 = 0$.

1. Donner un vecteur normal à P . Le vecteur $\vec{n}(2, -1, 3)$ est un vecteur normal à P .
2. La droite D passant par $A(1, 1, 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(4, -2, 6)$ est-elle orthogonale à P ? On observe que $\vec{u} = 2\vec{n}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires. Donc la droite D est orthogonale au plan P .

2.3 Distance d'un point à un plan

Définition

La distance d'un point A à un plan P est la plus courte distance entre A et un point de P . Elle correspond à la longueur du segment $[AH]$ où H est le projeté orthogonal de A sur P .

Théorème

Formule de la distance d'un point à un plan

Soit un plan P d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ et un point $A(x_A, y_A, z_A)$. La distance du point A au plan P , notée $d(A, P)$, est donnée par la formule :

$$d(A, P) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Point de méthode

Pour calculer la distance d'un point à un plan :

- S'assurer que l'équation du plan est sous la forme $ax + by + cz + d = 0$.
- Identifier les coefficients a, b, c, d et les coordonnées du point (x_A, y_A, z_A) .
- Appliquer la formule directement.

Exemple

Calculer la distance du point $A(1, -1, 2)$ au plan P d'équation $3x + 2y - z + 4 = 0$. Ici, $a = 3, b = 2, c = -1, d = 4$. Et $x_A = 1, y_A = -1, z_A = 2$.

$$d(A, P) = \frac{|3(1) + 2(-1) + (-1)(2) + 4|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2}}$$

$$d(A, P) = \frac{|3 - 2 - 2 + 4|}{\sqrt{9 + 4 + 1}}$$

$$d(A, P) = \frac{|3|}{\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{14}$$

2.4 Projection orthogonale**Définition**

Le projeté orthogonal d'un point A sur un plan P est le point H du plan P tel que la droite (AH) est orthogonale au plan P . Le projeté orthogonal d'un point A sur une droite D est le point H de la droite D tel que la droite (AH) est orthogonale à la droite D .

Point de méthode

Pour déterminer le projeté orthogonal H d'un point A sur un plan P :

- Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ et P d'équation $ax + by + cz + d = 0$.
- Le vecteur $\vec{n}(a, b, c)$ est un vecteur normal à P .
- La droite (AH) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}$. Sa représentation

$$\text{paramétrique est : } \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

- Le point H est l'intersection de la droite (AH) et du plan P . On substitue les expressions de x, y, z dans l'équation du plan pour trouver la valeur de t correspondante à H .
- Une fois t trouvé, on calcule les coordonnées de H .

Exemple

Déterminer le projeté orthogonal H du point $A(1, 0, 0)$ sur le plan P d'équation $x + 2y - z - 3 = 0$.

- Le vecteur normal à P est $\vec{n}(1, 2, -1)$.

- La droite (AH) a pour représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 + 2t = 2t \\ z = 0 - t = -t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

- H est sur P , donc ses coordonnées vérifient l'équation de P : $(1+t) + 2(2t) - (-t) - 3 = 0$
 $1 + t + 4t + t - 3 = 0 \quad 6t - 2 = 0 \quad t = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$

- Substituons $t = \frac{1}{3}$ dans les équations paramétriques pour trouver H : $x_H = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$
 $y_H = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad z_H = -\frac{1}{3}$

Conclusion : Le projeté orthogonal H de A sur P est $H\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

3 Transformations affines de l'espace

Remarque

Le programme se concentre sur l'application des transformations affines simples comme les translations, homothéties et rotations (dans des cas simples), mais il est important de comprendre le concept général.

3.1 Translation

Définition

La translation de vecteur $\vec{u}(a, b, c)$ est la transformation qui, à tout point $M(x, y, z)$, associe le point $M'(x', y', z')$ tel que $\vec{MM'} = \vec{u}$.

Propriété

Si $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$ sont associés par la translation de vecteur $\vec{u}(a, b, c)$, alors :

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$$

Exemple

Le point $M'(x', y', z')$ est l'image du point $M(1, 2, 3)$ par la translation de vecteur $\vec{u}(-1, 0, 2)$.
 $x' = 1 + (-1) = 0$ $y' = 2 + 0 = 2$ $z' = 3 + 2 = 5$ Donc $M'(0, 2, 5)$.

3.2 Homothétie

Définition

L'homothétie de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ et de rapport k (réel non nul) est la transformation qui, à tout point $M(x, y, z)$, associe le point $M'(x', y', z')$ tel que $\vec{\Omega M'} = k\vec{\Omega M}$.

Propriété

Si $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$ sont associés par l'homothétie de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ et de rapport k , alors :

$$\begin{cases} x' - x_\Omega = k(x - x_\Omega) \\ y' - y_\Omega = k(y - y_\Omega) \\ z' - z_\Omega = k(z - z_\Omega) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = kx + (1 - k)x_\Omega \\ y' = ky + (1 - k)y_\Omega \\ z' = kz + (1 - k)z_\Omega \end{cases}$$

Exemple

Déterminer l'image M' du point $M(2, 1, -1)$ par l'homothétie de centre $\Omega(1, 0, 0)$ et de rapport $k = 3$.

- $\vec{\Omega M}(2 - 1, 1 - 0, -1 - 0) = \vec{\Omega M}(1, 1, -1)$.
- $\vec{\Omega M'} = 3\vec{\Omega M} \Rightarrow \vec{\Omega M'}(3 \times 1, 3 \times 1, 3 \times (-1)) = \vec{\Omega M'}(3, 3, -3)$.
- Soit $M'(x', y', z')$. Alors $x' - 1 = 3 \Rightarrow x' = 4$. $y' - 0 = 3 \Rightarrow y' = 3$. $z' - 0 = -3 \Rightarrow z' = -3$.
Donc $M'(4, 3, -3)$.

3.3 Rotation (cas simples)

Remarque

Le programme de spécialité de terminale générale ne requiert pas l'étude des rotations générales dans l'espace, qui sont complexes. On se limite souvent à des rotations autour des axes de coordonnées ou dans des plans simples.

Définition

Une rotation est une transformation qui conserve les distances et l'orientation. Elle est définie par un axe de rotation et un angle de rotation.

Remarque

Les cas simples de rotation dans l'espace sont généralement ceux autour des axes du repère. Par exemple, une rotation d'angle θ autour de l'axe (Oz) laisse la coordonnée z invariante et transforme les coordonnées (x, y) dans le plan (Oxy) selon les formules de rotation plane.

Propriété

Pour une rotation d'angle θ autour de l'axe (Oz) (l'axe $(O; \vec{k})$) : Un point $M(x, y, z)$ a pour image $M'(x', y', z')$ avec :

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta \\ z' = z \end{cases}$$

Des formules similaires existent pour les rotations autour des axes (Ox) et (Oy) .

Exemple

Déterminer l'image M' du point $M(1, 0, 2)$ par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe (Oz) . Ici, $\theta = \frac{\pi}{2}$, donc $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. $x' = 1 \times 0 - 0 \times 1 = 0$ $y' = 1 \times 1 + 0 \times 0 = 1$ $z' = 2$ Donc $M'(0, 1, 2)$.