

Recueil d'exercices de réflexion : Géométrie dans l'espace

Terminales Spécialité Mathématiques

Juin 2025

Table des matières

1	Analyse de configurations et preuves géométriques	2
2	Problèmes de modélisation et d'optimisation	3
3	Défis et questions ouvertes	4

1 Analyse de configurations et preuves géométriques

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Exercice 1 (Pyramide et Orthogonalité). On considère les points $S(1, 1, 3)$, $A(1, -2, 0)$, $B(4, 1, 0)$ et $C(-2, 1, 0)$.

- Montrer que le triangle ABC est isocèle en B .
- Montrer que la droite (OS) est orthogonale au plan (OAB) où O est l'origine du repère. Qu'en déduire pour le plan (ABC) et la droite (OS) ?
- Déterminer une équation du plan (ABC) .
- Calculer l'aire du triangle ABC . En déduire le volume de la pyramide $SABC$.
- On appelle H le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC) . Déterminer les coordonnées de H .

Exercice 2 (Cube et Positions Relatives). On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. L'espace est muni du repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

- Donner les coordonnées de tous les sommets du cube.
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AG) .
- Déterminer une équation cartésienne du plan (BDE) .
- La droite (AG) et le plan (BDE) sont-ils sécants ? Si oui, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection I . Que représente ce point pour le cube ?
- Les droites (EC) et (DF) sont-elles coplanaires ? Justifier votre réponse.
- Soit M un point du segment $[AG]$. Démontrer que M est équidistant des plans (ABC) et (EFG) si et seulement si M est le milieu de $[AG]$.

Exercice 3 (Famille de Plans). Soit m un nombre réel. On considère le plan P_m d'équation $x + (m - 1)y - mz + 2m = 0$.

- Montrer que tous les plans P_m contiennent une droite D fixe dont on donnera une représentation paramétrique.
- Déterminer le plan P_m qui est parallèle à l'axe des ordonnées (Oy) .
- Existe-t-il un plan P_m orthogonal au plan Q d'équation $x - 2y + z - 1 = 0$? Si oui, préciser sa valeur de m .
- Peut-on trouver un plan P_m qui contienne le point $A(1, 1, 1)$? Justifier.

Exercice 4 (Tétraèdre et Orthocentre). Soit un tétraèdre $ABCD$ dont les arêtes opposées sont orthogonales. Par exemple, $(AB) \perp (CD)$, $(AC) \perp (BD)$, $(AD) \perp (BC)$. On appelle un tel tétraèdre un tétraèdre orthocentrique.

- On se place dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$.
 - Écrire les coordonnées des points A, B, C, D .
 - Traduire les conditions d'orthogonalité des arêtes opposées en termes de produit scalaire.
 - Développer ces produits scalaires en utilisant les coordonnées des points pour obtenir des relations entre les coordonnées.
- On admet que les hauteurs d'un tétraèdre orthocentrique sont concourantes en un point appelé orthocentre du tétraèdre. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre H dans un cas particulier, par exemple si $A(0, 0, 0)$, $B(x_B, 0, 0)$, $C(x_C, y_C, 0)$, $D(x_D, y_D, z_D)$. (Cela nécessite une bonne maîtrise du concept de hauteur et de l'orthogonalité droite-plan).

2 Problèmes de modélisation et d'optimisation

Exercice 5 (Lignes de Niveau et Distance Minimale). Soit le plan P d'équation $x + 2y - z = 0$ et le point $A(1, 0, 2)$.

- a) Calculer la distance du point A au plan P .
- b) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. On considère la fonction $f(M) = AM^2$. Déterminer l'ensemble des points M tels que $f(M) = 6$. Quelle est la nature de cet ensemble ?
- c) On cherche les points M du plan P qui minimisent la distance AM .
 - i) Sans calcul, quel point du plan P réalise cette distance minimale ? Justifier.
 - ii) Retrouver ce résultat en minimisant l'expression $f(M)$ sous la contrainte que M appartient à P . (Ceci peut nécessiter de substituer $z = x + 2y$ dans l'expression de $f(M)$ et d'étudier la fonction à deux variables obtenue).

Exercice 6 (Trajectoire et Obstacle). Un drone part du point $A(0, 0, 10)$ et se déplace en ligne droite vers le point $B(10, 20, 0)$. Sa trajectoire est modélisée par la droite (AB) . Un mur vertical est modélisé par la portion de plan d'équation $x = 5$ pour $0 \leq y \leq 15$ et $0 \leq z \leq 8$.

- a) Déterminer une représentation paramétrique de la trajectoire du drone.
- b) Le drone va-t-il percuter le mur ? Si oui, déterminer les coordonnées du point d'impact.
- c) Pour éviter le mur, le drone décide de changer de trajectoire à mi-chemin entre A et B . Il se dirige alors vers un nouveau point $C(15, 10, 5)$.
 - i) Déterminer les coordonnées du point M , milieu du segment $[AB]$.
 - ii) Déterminer la nouvelle représentation paramétrique de la trajectoire du drone à partir de M .
 - iii) Le drone percutera-t-il le mur sur cette nouvelle trajectoire ? Justifier.

Exercice 7 (Volume d'un Pavé Droit et Optimisation). Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le pavé droit $OABCDEFG$ où $A(a, 0, 0)$, $C(0, b, 0)$, $G(0, 0, c)$ sont des points sur les axes, avec a, b, c des réels strictement positifs. Le sommet E du pavé est sur le plan P d'équation $x + 2y + z - 12 = 0$.

- a) Donner les coordonnées du point E en fonction de a, b, c .
- b) Justifier que les coordonnées de E vérifient l'équation du plan P .
- c) Exprimer le volume V du pavé droit en fonction de a, b, c .
- d) En utilisant la relation trouvée en b), exprimer c en fonction de a et b . En déduire l'expression du volume $V(a, b)$ en fonction de a et b seulement.
- e) Ce problème vise à maximiser le volume du pavé. Sans faire les calculs d'optimisation (qui sortent du cadre de ce cours), quelle démarche mathématique serait utilisée pour trouver les valeurs de a et b qui maximisent $V(a, b)$? Décrire les étapes principales.

3 Défis et questions ouvertes

Exercice 8 (L'énigme du point le plus proche). Soit la droite D_1 définie par $D_1 :$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ et la droite } D_2 \text{ définie par } D_2 : \begin{cases} x = 2 \\ y = s \\ z = s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

- a) Montrer que les droites D_1 et D_2 ne sont ni parallèles, ni sécantes (elles sont non coplanaires).
- b) On cherche à déterminer la distance minimale entre ces deux droites.
 - i) Soient M_1 un point de D_1 et M_2 un point de D_2 . Exprimer les coordonnées du vecteur $\vec{M_1M_2}$ en fonction de t et s .
 - ii) La distance entre D_1 et D_2 est la distance entre les points M_1 et M_2 pour lesquels $\vec{M_1M_2}$ est orthogonal à la fois au vecteur directeur de D_1 et au vecteur directeur de D_2 . Traduire cette condition en termes de produit scalaire et établir un système d'équations en t et s .
 - iii) Résoudre le système pour trouver les valeurs de t et s qui minimisent la distance.
 - iv) Calculer la distance minimale entre D_1 et D_2 .

Exercice 9 (Rotation et invariant). Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la transformation R qui, à tout point $M(x, y, z)$, associe le point $M'(x', y', z')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ z' = z \end{cases}$$

- a) Quelle est la nature de cette transformation ? Quel est son axe et son angle ? Justifier.
- b) Déterminer l'ensemble des points invariants par R .
- c) Soit P le plan d'équation $x + y - z = 0$. Déterminer l'image du plan P par la transformation R . Le plan P est-il invariant par R ?
- d) Trouver une droite D qui soit globalement invariante par R (c'est-à-dire que $R(D) = D$), mais dont aucun point n'est invariant.