

Recueil d'exercices d'application : Géométrie dans l'espace

Terminales Spécialité Mathématiques

Juin 2025

Table des matières

1	Vecteurs, droites et plans de l'espace	2
1.1	Coordonnées et opérations sur les vecteurs	2
1.2	Colinéarité et coplanarité	2
1.3	Représentations de droites et de plans	3
1.4	Position relative de droites et de plans	3
2	Produit scalaire dans l'espace	4
2.1	Calcul du produit scalaire et orthogonalité	4
2.2	Vecteur normal à un plan et orthogonalité	4
2.3	Distance d'un point à un plan	5
2.4	Projection orthogonale	5
3	Transformations affines de l'espace	6
3.1	Translations	6
3.2	Homothéties	6
3.3	Rotations (cas simples)	6

1 Vecteurs, droites et plans de l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1.1 Coordonnées et opérations sur les vecteurs

Exercice 1. Soient les points $A(1, -2, 4)$, $B(3, 0, -1)$ et $C(-2, 5, 0)$.

- Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ et $\vec{CA}$.
- Calculer les normes $\|\vec{AB}\|$, $\|\vec{BC}\|$ et $\|\vec{CA}\|$.
- Déterminer les coordonnées du point M tel que $\vec{AM} = 2\vec{BC}$.
- Déterminer les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$.

Exercice 2. Soient les vecteurs $\vec{u}(2, -1, 3)$, $\vec{v}(0, 4, -2)$ et $\vec{w}(-1, 1, 0)$.

- Calculer les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$.
- Calculer les coordonnées de $3\vec{w} - \vec{u}$.
- Calculer les coordonnées de $2\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w}$.

Exercice 3. On considère les points $A(1, 1, 0)$, $B(2, 3, -1)$ et $C(0, -1, 1)$.

- Les points A, B, C sont-ils alignés ? Justifier votre réponse.
- Déterminer un point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

1.2 Colinéarité et coplanarité

Exercice 4. Déterminer si les vecteurs suivants sont colinéaires :

- $\vec{u}(1, 2, -3)$ et $\vec{v}(-2, -4, 6)$
- $\vec{u}(3, 0, 1)$ et $\vec{v}(6, 1, 2)$

Exercice 5. On donne les points $A(1, 0, 2)$, $B(3, 1, 0)$, $C(-1, -1, 4)$ et $D(5, 2, -2)$. Les points A, B, C sont-ils alignés ? Justifier. Les points A, B, D sont-ils alignés ? Justifier.

Exercice 6. Soient $\vec{u}(1, 2, 0)$, $\vec{v}(0, 1, 1)$ et $\vec{w}(2, 3, -1)$. Ces trois vecteurs sont-ils coplanaires ? Justifier votre réponse.

Exercice 7. On considère les points $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 0)$, $C(0, 2, 2)$ et $D(3, 1, 4)$. Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires ? Justifier.

1.3 Représentations de droites et de plans

Exercice 8. Donner une représentation paramétrique de la droite D passant par $A(2, -1, 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1, 2, 0)$.

Exercice 9. La droite D est donnée par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 3 + 4t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

- a) Donner un point et un vecteur directeur de la droite D .
- b) Le point $E(7, -3, 15)$ appartient-il à la droite D ? Justifier.

Exercice 10. Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par le point $A(1, 2, -1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(3, -1, 2)$.

Exercice 11. On considère les points $A(0, 0, 1)$, $B(1, 2, 0)$ et $C(2, 0, 0)$.

- a) Montrer que les points A, B, C ne sont pas alignés.
- b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .

1.4 Position relative de droites et de plans

Exercice 12. Étudier la position relative des droites D_1 et D_2 . $D_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et

$$D_2 : \begin{cases} x = s \\ y = 3 + s \\ z = 1 - 2s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

Exercice 13. Soient le plan P d'équation $x - 2y + 3z - 5 = 0$ et la droite D de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

Déterminer la position relative de la droite D et du plan P . Si elles sont sécantes, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice 14. Étudier la position relative des plans P_1 et P_2 . $P_1 : 2x - y + 3z - 1 = 0$
 $P_2 : 4x - 2y + 6z + 5 = 0$

Exercice 15. On considère le plan P_1 d'équation $x + y - z + 2 = 0$ et le plan P_2 d'équation $2x - y + 3z - 1 = 0$. Déterminer la nature de leur intersection et en donner une représentation si possible.

2 Produit scalaire dans l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2.1 Calcul du produit scalaire et orthogonalité

Exercice 16. Soient les vecteurs $\vec{u}(1, -2, 3)$, $\vec{v}(4, 1, -1)$ et $\vec{w}(2, 0, 5)$. Calculer les produits scalaires suivants :

- a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$
- b) $\vec{u} \cdot \vec{w}$
- c) $\vec{v} \cdot \vec{w}$

Exercice 17. Déterminer si les paires de vecteurs suivantes sont orthogonales :

- a) $\vec{a}(3, -1, 2)$ et $\vec{b}(1, 5, 1)$
- b) $\vec{c}(0, 2, -3)$ et $\vec{d}(6, 3, 2)$

Exercice 18. Soient $A(1, 0, -1)$, $B(2, 1, 3)$ et $C(0, -2, 5)$.

- a) Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
- b) Le triangle ABC est-il rectangle en A ? Justifier.

Exercice 19. Déterminer la valeur de m pour que les vecteurs $\vec{u}(m, 2, -1)$ et $\vec{v}(3, -4, 2)$ soient orthogonaux.

2.2 Vecteur normal à un plan et orthogonalité

Exercice 20. Soit le plan P d'équation $3x - 2y + z + 7 = 0$.

- a) Donner un vecteur normal au plan P .
- b) La droite D passant par $A(1, 0, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(6, -4, 2)$ est-elle orthogonale à P ? Justifier.
- c) La droite L de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + t \\ z = 1 + 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$
 est-elle parallèle au plan P ? Justifier.

Exercice 21. Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par le point $A(2, 1, -3)$ et orthogonal à la droite D dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 4 + 3t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

2.3 Distance d'un point à un plan

Exercice 22. Calculer la distance du point $A(2, 3, -1)$ au plan P d'équation $x - 2y + 2z - 4 = 0$.

Exercice 23. Soit le point $B(0, 1, 5)$ et le plan Q d'équation $2x + y - 2z + 1 = 0$. Calculer $d(B, Q)$.

2.4 Projection orthogonale

Exercice 24. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point $A(1, 2, 0)$ sur le plan P d'équation $x - y + z - 1 = 0$.

Exercice 25. Soit le point $B(0, 0, 0)$ (l'origine du repère) et le plan P d'équation $2x - y + z + 6 = 0$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de B sur P .

3 Transformations affines de l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

3.1 Translations

Exercice 26. Soit $M(3, -1, 2)$. Déterminer les coordonnées du point M' image de M par la translation de vecteur $\vec{u}(-2, 4, 1)$.

Exercice 27. Un point $A'(5, 2, -1)$ est l'image du point $A(1, 3, 0)$ par une translation $t_{\vec{u}}$. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$.

3.2 Homothéties

Exercice 28. Déterminer l'image M' du point $M(2, 2, 2)$ par l'homothétie de centre $\Omega(1, 0, 1)$ et de rapport $k = 2$.

Exercice 29. Soit l'homothétie h de centre $C(0, 0, 0)$ et de rapport $k = -3$. Déterminer les coordonnées du point A dont l'image par h est $A'(-6, 3, -9)$.

3.3 Rotations (cas simples)

Exercice 30. Déterminer l'image M' du point $M(1, 1, 0)$ par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe (Oz) .

Exercice 31. Un point $P(0, -2, 5)$ est soumis à une rotation d'angle π autour de l'axe (Oz) . Déterminer les coordonnées de son image P' .