

Analyse

1 Suites numériques

1.1 Rappels et prolongements sur les limites de suites

Définition

Une suite numérique (u_n) est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note u_n l'image de l'entier n .

Propriété

Opérations sur les limites de suites : Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. L et L' sont des réels.

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L'$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = L + L'$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L'$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) = LL'$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L'$ avec $L' \neq 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n} \right) = \frac{L}{L'}$.

Des règles similaires existent pour les limites infinies, avec des formes indéterminées (FI) : $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$.

Théorème

Théorèmes de comparaison et d'encadrement :

- Si à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
- **Théorème des gendarmes :** Si à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$.

Exemple

Considérons la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$. Nous savons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$. En divisant par n (qui est positif), on obtient :

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, on peut conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Remarque

Les théorèmes de comparaison sont particulièrement utiles pour déterminer la limite de suites dont l'expression est complexe ou contient des fonctions oscillantes comme $\sin(n)$ ou $\cos(n)$.

1.2 Convergences et suites monotones

Définition

- Une suite (u_n) est dite **convergente** si elle admet une limite réelle L . On écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$.
- Une suite (u_n) est dite **divergente** si elle n'est pas convergente, c'est-à-dire si sa limite est $+\infty$, $-\infty$, ou si elle n'admet pas de limite.

Définition

- Une suite (u_n) est **croissante** si pour tout n , $u_{n+1} \geq u_n$.
- Une suite (u_n) est **décroissante** si pour tout n , $u_{n+1} \leq u_n$.
- Une suite est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.
- Une suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout n , $u_n \leq M$.
- Une suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout n , $u_n \geq m$.
- Une suite est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Théorème

Théorème de convergence monotone :

- Toute suite croissante et majorée converge.
- Toute suite décroissante et minorée converge.

Remarque

Ce théorème est fondamental car il permet de prouver la convergence d'une suite sans avoir besoin de calculer explicitement sa limite. Il est très utilisé pour les suites définies par récurrence.

Point de méthode

Pour étudier la convergence d'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$:

1. Calculer les premiers termes pour conjecturer la monotonie et la convergence.
2. Démontrer par récurrence que la suite est bornée (si elle est majorée/minorée par sa limite potentielle).
3. Démontrer la monotonie de la suite (en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$ ou en comparant $f(x)$ et x).
4. Conclure sur la convergence en utilisant le théorème de convergence monotone.
5. Si la suite converge vers L , alors L est solution de l'équation $L = f(L)$.

Exemple

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. **Conjecture :** $u_0 = 1$, $u_1 = \sqrt{2(1) + 3} = \sqrt{5} \approx 2,23$, $u_2 = \sqrt{2\sqrt{5} + 3} \approx \sqrt{4,47 + 3} = \sqrt{7,47} \approx 2,73$. La suite semble croissante. On peut résoudre $L = \sqrt{2L + 3} \Rightarrow L^2 = 2L + 3 \Rightarrow L^2 - 2L - 3 = 0$. Les solutions sont $L = -1$ ou $L = 3$. Comme $u_n > 0$, la limite potentielle est 3. La suite semble converger vers 3.
2. **Démonstration par récurrence :** $0 < u_n \leq 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. *Initialisation :* Pour $n = 0$, $u_0 = 1$, et $0 < 1 \leq 3$. La propriété est vraie. *Hérédité :* Supposons que pour un certain $k \in \mathbb{N}$, $0 < u_k \leq 3$. Alors $0 < 2u_k \leq 6 \Rightarrow 3 < 2u_k + 3 \leq 9$. En prenant la racine carrée (la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$) : $\sqrt{3} < \sqrt{2u_k + 3} \leq \sqrt{9}$, $1,73 < u_{k+1} \leq 3$. Donc $0 < u_{k+1} \leq 3$. La propriété est héréditaire. *Conclusion :* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq 3$. La suite est majorée par 3 (et minorée par 0).
3. **Démonstration de la monotonie :** Étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$. On peut aussi étudier la fonction $f(x) = \sqrt{2x + 3}$. Si $x \in]0, 3]$, $f(x) - x = \sqrt{2x + 3} - x = \frac{(\sqrt{2x+3}-x)(\sqrt{2x+3}+x)}{\sqrt{2x+3}+x} = \frac{2x+3-x^2}{\sqrt{2x+3}+x} = \frac{-(x^2-2x-3)}{\sqrt{2x+3}+x} = \frac{-(x-3)(x+1)}{\sqrt{2x+3}+x}$. Pour $x \in]0, 3]$, $x - 3 \leq 0$ et $x + 1 > 0$. Donc $-(x - 3)(x + 1) \geq 0$. Le dénominateur $\sqrt{2x + 3} + x$ est positif. Donc $f(x) - x \geq 0$, ce qui signifie $f(x) \geq x$. Puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_n \in]0, 3]$, alors $u_{n+1} \geq u_n$. La suite (u_n) est croissante.
4. **Conclusion de la convergence :** La suite (u_n) est croissante et majorée par 3. D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge. Soit L sa limite. Puisque f est continue sur $[0, +\infty[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, alors L doit vérifier $L = f(L)$, soit $L = \sqrt{2L + 3}$. On a déjà résolu cette équation : $L^2 - 2L - 3 = 0$, qui donne $L = -1$ ou $L = 3$. Comme la suite est croissante et $u_0 = 1$, tous les termes u_n sont supérieurs ou égaux à 1. Donc la limite L ne peut pas être -1 . Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

2 Fonctions : Limites et continuité

2.1 Limites des fonctions

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I (ou un intervalle privé d'un point a).

- On dit que $f(x)$ tend vers un réel L quand x tend vers a si $f(x)$ est aussi proche de L que l'on veut lorsque x est suffisamment proche de a . On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.
- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si $f(x)$ est arbitrairement grand lorsque x est suffisamment proche de a . On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.
- Définitions similaires pour $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Propriété

Opérations sur les limites de fonctions : Les règles d'opérations sur les limites de fonctions sont les mêmes que pour les suites. Elles s'appliquent pour les sommes, produits, quotients et compositions de fonctions. Les formes indéterminées restent $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$.

Théorème

Théorème des gendarmes pour les fonctions : Soient f, g, h trois fonctions définies sur un intervalle I contenant a (ou au voisinage de $\pm\infty$). Si pour tout $x \in I$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ et $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. (Le même théorème s'applique pour $x \rightarrow \pm\infty$).

Définition

Asymptotes :

- La droite d'équation $y = L$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ (resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$).
- La droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de f si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ (ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$).
- La droite d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à la courbe représentative de f en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ (resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$).

Point de méthode

Pour déterminer une asymptote oblique : Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, on calcule $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$. Si a est un réel non nul, on calcule $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax)$. Si b est un réel, alors la droite $y = ax + b$ est asymptote oblique.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x}$. On peut écrire $f(x) = \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = x + 1 + \frac{1}{x}$.

- En $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x + 1)) = 0$. La droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à C_f en $+\infty$.
- En $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x + 1)) = 0$. La droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à C_f en $-\infty$.
- En 0: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$. La droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à C_f .

2.2 Continuité des fonctions

Définition

Une fonction f est dite **continue en un point** a de son ensemble de définition si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Une fonction f est dite **continue sur un intervalle** I si elle est continue en tout point de I .

Remarque

Intuitivement, une fonction est continue si l'on peut tracer sa courbe représentative sans lever le crayon.

Propriété

Propriétés des fonctions continues :

- Les fonctions usuelles (polynômes, racine carrée, fonctions trigonométriques, exponentielle, logarithme) sont continues sur leurs ensembles de définition.
- La somme, le produit, le quotient (si le dénominateur est non nul) et la composition de fonctions continues sont continues.

Théorème

Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI) : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (c'est-à-dire si $k \in [\min(f(a), f(b)); \max(f(a), f(b))]$), il existe au moins un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Remarque

Le TVI garantit l'existence d'une solution, mais ne donne pas sa valeur. Il est souvent utilisé pour montrer qu'une équation $f(x) = k$ possède au moins une solution.

Théorème

Corollaire du TVI (cas des bijections) : Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a, b]$.

Point de méthode

Pour montrer qu'une équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur un intervalle $[a, b]$:

1. Vérifier que f est continue sur $[a, b]$.
2. Vérifier que f est strictement monotone sur $[a, b]$ (en étudiant le signe de $f'(x)$).
3. Calculer $f(a)$ et $f(b)$.
4. S'assurer que 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (c'est-à-dire $f(a) \times f(b) < 0$).
5. Conclure en utilisant le corollaire du TVI.

Exemple

Montrons que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. Soit $f(x) = x^3 + x - 1$.

1. **Continuité** : La fonction f est une fonction polynomiale, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.
2. **Monotonie** : Calculons la dérivée $f'(x) = 3x^2 + 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, donc $3x^2 \geq 0$, et $3x^2 + 1 \geq 1 > 0$. Puisque $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. **Limites aux bornes** : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$.
4. **Application du corollaire du TVI** : Puisque f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et que 0 est compris entre $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, il existe une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $f(\alpha) = 0$. **Encadrement de la solution** : $f(0) = -1$ et $f(1) = 1^3 + 1 - 1 = 1$. Puisque $f(0) < 0 < f(1)$, d'après le corollaire du TVI, $\alpha \in]0, 1[$.

3 Dérivabilité et Convexité

3.1 Rappels et prolongements sur la dérivabilité

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. La fonction f est **dérivable en a** si le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand x tend vers a . Cette limite est appelée le **nombre dérivé de f en a** , noté $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si f est dérivable en a , alors la courbe représentative de f admet une tangente au point d'abscisse a , dont l'équation est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Propriété

Lien entre dérivabilité et continuité : Si une fonction est dérivable en un point, alors elle est continue en ce point. La réciproque est fausse (ex: $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais non dérivable en 0).

Propriété

Opérations sur les dérivées : Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , k un réel.

- $(u + v)' = u' + v'$
- $(ku)' = ku'$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ (si $u(x) \neq 0$)
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ (si $v(x) \neq 0$)
- $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ (pour $n \in \mathbb{Z}^*$, $u(x) \neq 0$ si $n < 0$)
- $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ (si $u(x) > 0$)
- $(e^u)' = u'e^u$
- $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ (si $u(x) > 0$)

Propriété

Sens de variation et dérivée : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si $f'(x) > 0$ sur I , alors f est strictement croissante sur I .
- Si $f'(x) < 0$ sur I , alors f est strictement décroissante sur I .
- Si $f'(x) = 0$ sur I , alors f est constante sur I .

Point de méthode

Pour étudier les variations d'une fonction :

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction.
2. Calculer la dérivée de la fonction.
3. Étudier le signe de la dérivée sur l'ensemble de définition.
4. Dresser le tableau de variations en déduisant le sens de variation et en calculant les limites aux bornes ou les valeurs aux points critiques.

Exemple

Étudions les variations de la fonction $f(x) = (2x - 1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

1. **Ensemble de définition :** $D_f = \mathbb{R}$.
2. **Calcul de la dérivée :** On utilise la formule $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u(x) = 2x - 1$ et $v(x) = e^{-x}$. $u'(x) = 2$, $v'(x) = -e^{-x}$ (en utilisant $(e^w)' = w'e^w$ avec $w(x) = -x$)
 $f'(x) = 2e^{-x} + (2x - 1)(-e^{-x})$ $f'(x) = e^{-x}(2 - (2x - 1))$ $f'(x) = e^{-x}(2 - 2x + 1)$
 $f'(x) = e^{-x}(3 - 2x)$
3. **Signe de la dérivée :** Puisque $e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $f'(x)$ est celui de $3 - 2x$.
 $3 - 2x > 0 \Leftrightarrow 3 > 2x \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$. $3 - 2x < 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$. $3 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.
4. **Tableau de variations :** Calculons les limites : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1)e^{-x}$.
On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{e^x}$. C'est une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. On utilise la croissance comparée : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Calculons la valeur au point critique : $f(\frac{3}{2}) = (2(\frac{3}{2}) - 1)e^{-3/2} = (3 - 1)e^{-3/2} = 2e^{-3/2}$.

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	-
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow 2e^{-3/2}$	$\searrow 0$

3.2 Fonctions convexes et concaves

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- La fonction f est **convexe** sur I si sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes sur I .
- La fonction f est **concave** sur I si sa courbe représentative est entièrement située en-dessous de chacune de ses tangentes sur I .

Propriété

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

- Si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est convexe sur I .
- Si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est concave sur I .

Définition

Un point d'inflexion est un point où la courbe de la fonction traverse sa tangente. Graphiquement, c'est un point où la convexité change (de convexe à concave, ou de concave à convexe).

Propriété

Si f est deux fois dérivable sur un intervalle I , et si f'' s'annule en un point $a \in I$ en changeant de signe, alors le point $(a, f(a))$ est un point d'inflexion pour la courbe représentative de f .

Point de méthode

Pour étudier la convexité d'une fonction :

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction.
2. Calculer la dérivée seconde $f''(x)$.
3. Étudier le signe de $f''(x)$.
4. Conclure sur les intervalles de convexité/concavité et identifier les points d'inflexion si $f''(x)$ change de signe.

Exemple

Étudions la convexité de la fonction $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 5$ sur $\mathbb{R}$.

1. **Ensemble de définition :** $D_f = \mathbb{R}$.
2. **Calcul des dérivées première et seconde :** $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x$ $f''(x) = 12x^2 - 12x - 24$
3. **Signe de la dérivée seconde :** $f''(x) = 12(x^2 - x - 2)$. Cherchons les racines du trinôme $x^2 - x - 2 = 0$. Discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-2) = 1 + 8 = 9$. Racines : $x_1 = \frac{1-\sqrt{9}}{2} = \frac{1-3}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{9}}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$. Le trinôme $x^2 - x - 2$ est positif à l'extérieur des racines et négatif entre les racines. Donc $f''(x) \geq 0$ pour $x \in]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$. Et $f''(x) \leq 0$ pour $x \in [-1, 2]$.
4. **Conclusion sur la convexité et points d'inflexion :**
 - Sur $] -\infty, -1]$, $f''(x) \geq 0$, donc f est convexe.
 - Sur $[-1, 2]$, $f''(x) \leq 0$, donc f est concave.
 - Sur $[2, +\infty[$, $f''(x) \geq 0$, donc f est convexe.

f'' s'annule en -1 et 2 en changeant de signe. Il y a donc deux points d'inflexion :
 $P_1 = (-1, f(-1)) = (-1, (-1)^4 - 2(-1)^3 - 12(-1)^2 + 5) = (-1, 1 + 2 - 12 + 5) = (-1, -4)$.
 $P_2 = (2, f(2)) = (2, (2)^4 - 2(2)^3 - 12(2)^2 + 5) = (2, 16 - 16 - 48 + 5) = (2, -43)$.

4 Fonction logarithme népérien et fonction exponentielle

4.1 Fonction logarithme népérien ($\ln$)

Définition

La fonction **logarithme népérien**, notée $\ln$, est la primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1. C'est la réciproque de la fonction exponentielle.

Propriété

Propriétés essentielles :

- $D_{\ln} =]0, +\infty[$
- $\ln(1) = 0$
- $\ln(e) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ pour $a, b > 0$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ for $a, b > 0$
- $\ln(a^n) = n \ln(a)$ for $a > 0, n \in \mathbb{Z}$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$ for $a > 0$
- La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Théorème

Croissances comparées avec $\ln$:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ pour tout $n > 0$ (le polynôme l'emporte sur le $\ln$)
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$ pour tout $n > 0$

Exemple

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$. Il s'agit d'une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. On peut écrire $\frac{\ln(x^2+1)}{x} = \frac{\ln(x^2(1+1/x^2))}{x} = \frac{\ln(x^2) + \ln(1+1/x^2)}{x} = \frac{2 \ln x + \ln(1+1/x^2)}{x} = \frac{2 \ln x}{x} + \frac{\ln(1+1/x^2)}{x}$. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} = 0$. Aussi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 1/x^2) = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + 1/x^2) = \ln(1) = 0$. Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+1/x^2)}{x} = 0$. Finalement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = 0$.

4.2 Fonction exponentielle (exp ou e^x)

Définition

La fonction **exponentielle**, notée $\exp$ ou e^x , est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$. C'est la réciproque de la fonction logarithme népérien.

Propriété

Propriétés essentielles :

- $D_{\exp} = \mathbb{R}$
- $e^0 = 1$
- $e^1 = e$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- $e^{a+b} = e^a e^b$
- $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- $(e^a)^n = e^{na}$ for $n \in \mathbb{Z}$
- $e^{\ln x} = x$ for $x > 0$
- $\ln(e^x) = x$ for $x \in \mathbb{R}$
- La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $(e^x)' = e^x$

Théorème

Croissances comparées avec exp :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour tout $n > 0$ (l'exponentielle l'emporte sur le polynôme)
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$ pour tout $n > 0$

Exemple

Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{x+1}$. On peut réécrire l'expression : $x e^{x+1} = x e^x e^1 = e \cdot (x e^x)$. On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ (croissance comparée). Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{x+1} = e \cdot 0 = 0$.

Remarque

Les croissances comparées sont essentielles pour lever les formes indéterminées impliquant $\ln$ et $\exp$. L'exponentielle "gagne" toujours face à une puissance de x en $+\infty$, et une puissance de x "gagne" toujours face au logarithme en $+\infty$.

5 Intégration

5.1 Primitives

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Une fonction F est une **primitive** de f sur I si F est dérivable sur I et si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Propriété

- Si F est une primitive de f sur I , alors toutes les primitives de f sur I sont de la forme $F(x) + C$, où C est une constante réelle.
- Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

Propriété

Primitives des fonctions usuelles (exemples) :

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$	Condition(s)
k (constante)	$kx + C$	$x \neq 0$ (sur $]0, \infty[$ ou $] - \infty, 0[$)
x^n ($n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	
e^x	$e^x + C$	
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	$u(x) \neq 0$
$u'(x)u^n(x)$ ($n \neq -1$)	$\frac{u^{n+1}(x)}{n+1} + C$	
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x) + C$	
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + C$	

Point de méthode

Pour trouver la primitive d'une fonction f qui prend une valeur donnée en un point :

1. Trouver une primitive générale $F_0(x)$ de $f(x)$ (sans la constante).
2. La primitive recherchée est de la forme $F(x) = F_0(x) + C$.
3. Utiliser la condition donnée (ex: $F(a) = b$) pour déterminer la valeur de C .

Exemple

Trouver la primitive F de $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$ telle que $F(1) = 3$.

1. Les primitives de $2x$ sont x^2 . Les primitives de $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ sont $\frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$. Donc une primitive générale de $f(x)$ est $F(x) = x^2 - \frac{1}{x} + C$.
2. On utilise la condition $F(1) = 3$: $F(1) = 1^2 - \frac{1}{1} + C = 1 - 1 + C = C$. Puisque $F(1) = 3$, on a $C = 3$.
3. La primitive recherchée est $F(x) = x^2 - \frac{1}{x} + 3$.

5.2 Intégrales

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et F une primitive de f sur cet intervalle. L'intégrale de f de a à b est le nombre réel noté $\int_a^b f(x) dx$, défini par :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Remarque

L'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ représente l'aire algébrique délimitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$. Si $f(x) \geq 0$ sur $[a, b]$, c'est l'aire.

Propriété

Propriétés des intégrales :

- **Linéarité** : $\int_a^b (kf(x) + lg(x)) dx = k \int_a^b f(x) dx + l \int_a^b g(x) dx$ pour $k, l \in \mathbb{R}$.
- **Relation de Chasles** : Pour $c \in [a, b]$, $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.
- **Inversion des bornes** : $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.
- Si $a \leq b$ et $f(x) \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.
- Si $a \leq b$ et $f(x) \geq g(x)$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

Définition

La **valeur moyenne** d'une fonction continue f sur un intervalle $[a, b]$ avec $a \neq b$ est le nombre m défini par :

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Remarque

La valeur moyenne correspond à la hauteur d'un rectangle de base $(b-a)$ qui aurait la même aire que l'aire sous la courbe de f sur $[a, b]$.

Point de méthode

Pour calculer une intégrale :

1. Trouver une primitive $F(x)$ de la fonction $f(x)$.
2. Appliquer la formule $F(b) - F(a)$.

Exemple

Calculer l'intégrale $I = \int_1^2 (3x^2 - 2x + 1) dx$.

1. Trouver une primitive de $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$: Une primitive de $3x^2$ est x^3 . Une primitive de $-2x$ est $-x^2$. Une primitive de 1 est x . Donc, $F(x) = x^3 - x^2 + x$.
2. Appliquer la formule : $I = [x^3 - x^2 + x]_1^2$ $I = (2^3 - 2^2 + 2) - (1^3 - 1^2 + 1)$ $I = (8 - 4 + 2) - (1 - 1 + 1)$ $I = 6 - 1$ $I = 5$.

Exemple

Calculer la valeur moyenne de $f(x) = e^{2x}$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

1. Calculer l'intégrale : $\int_0^1 e^{2x} dx$. Une primitive de e^{2x} est $\frac{1}{2}e^{2x}$. $\int_0^1 e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}e^{2(1)} - \frac{1}{2}e^{2(0)} = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}$.
2. Calculer la valeur moyenne $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$: $m = \frac{1}{1-0} \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{e^2-1}{2}$.