

Recueil d'exercices de réflexion sur les Intégrales

Mathématiques Spécialité Terminale Générale

Année Scolaire 2024-2025

Introduction

Ce recueil d'exercices est conçu pour les élèves de Terminale Générale suivant la spécialité Mathématiques. Il se concentre exclusivement sur le chapitre des intégrales, en accord avec le programme officiel. L'objectif principal de ces exercices est de stimuler le raisonnement, l'autonomie et la capacité de modélisation des situations. Vous y trouverez des problèmes ouverts, invitant à la prise d'initiative et à la mobilisation de différentes notions mathématiques. Les contextes sont variés et propices à l'argumentation et à l'analyse approfondie.

Il est important de noter qu'aucune solution n'est fournie pour ces exercices. L'autonomie dans la recherche et la vérification des résultats est une compétence clé à développer.

Propriété

Rappels des propriétés fondamentales à mobiliser :

- L'intégrale comme aire sous une courbe (fonctions positives et négatives).
- Le lien fondamental entre intégrale et primitives.
- La linéarité de l'intégrale : $\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$.
- La relation de Chasles : $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$.
- L'intégration par parties : $\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$.
- L'inégalité de la moyenne : si $m \leq f(x) \leq M$ sur $[a, b]$ (avec $a < b$), alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.
- La valeur moyenne d'une fonction f sur $[a, b]$ est $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Exercices de Réflexion

Exercice 1 : Optimisation d'une aire

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 5$. Soit a un réel. On note $\mathcal{A}(a)$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de f , l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = a$ et $x = a + 1$.

- (a) Justifier que $f(x) > 0$ pour tout réel x . En déduire une expression de $\mathcal{A}(a)$ en fonction de a .
- (b) Déterminer la valeur de a pour laquelle cette aire est minimale. Justifier votre réponse rigoureusement.
- (c) Proposer une interprétation graphique de ce résultat.

Exercice 2 : Rencontre de courbes et partage d'aires

On considère les fonctions f et g définies sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = e^x$ et $g(x) = ax$, où a est un réel strictement positif.

- (a) Étudier le nombre de points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ en fonction de a .
- (b) On suppose qu'il existe un unique point d'intersection. Déterminer la valeur de a correspondante. Pour cette valeur de a , calculer l'aire du domaine délimité par les deux courbes et l'axe des ordonnées.
- (c) On suppose que les deux courbes se coupent en deux points d'abscisses x_1 et x_2 ($x_1 < x_2$). La droite d'équation $x = c$ (où $c \in]x_1, x_2[$) partage le domaine délimité par $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$, et les droites $x = x_1$, $x = x_2$ en deux sous-domaines d'aires égales. Comment déterminer c ? (Il n'est pas demandé de calculer c , mais d'expliquer la démarche).

Exercice 3 : Fonctions définies par une intégrale

Pour tout réel $x > 0$, on définit la fonction F par $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$.

- (a) Calculer $F(x)$ en fonction de x .
- (b) Étudier les variations de la fonction F .
- (c) Représenter graphiquement la fonction F (on pourra étudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition et les points particuliers).
- (d) On considère la fonction $G(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{t} dt$ pour $x > 0$. Exprimer $G(x)$ en fonction de $F(x)$. En déduire les variations de G .

Exercice 4 : Phénomène physique et intégrales

Un ingénieur étudie la consommation d'énergie d'un nouvel appareil. La puissance électrique $P(t)$ (en Watts) consommée par l'appareil à l'instant t (en heures, $t \geq 0$) est modélisée par la fonction $P(t) = 10(1 - e^{-0.5t})$.

- (a) Justifier que la puissance est toujours positive et croissante dans le temps. Que se passe-t-il pour t très grand?
- (b) L'énergie consommée sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$ est donnée par l'intégrale de la puissance sur cet intervalle. Calculer l'énergie consommée (en Joules, $1 \text{ Wh} = 3600 \text{ J}$) pendant les 4 premières heures de fonctionnement.
- (c) L'ingénieur souhaite que l'énergie consommée pendant les T premières heures soit égale à 80% de l'énergie maximale que l'appareil pourrait théoriquement consommer sur une durée infinie. Déterminer la valeur de T .
- (d) On considère un deuxième appareil dont la consommation est modélisée par $P_2(t) = 5(1 + e^{-0.2t})$. Quel appareil consomme le moins d'énergie sur les 10 premières heures?

Exercice 5 : Inégalité et intégration par parties

Soit n un entier naturel non nul. On définit la suite d'intégrales (I_n) par $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

- (a) Calculer I_0 .
- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire la limite de (I_n) .
- (c) À l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre I_n et I_{n-1} pour $n \geq 1$.
- (d) Sans calculer I_n , donner une valeur approchée de I_2 . Justifier votre méthode.

Exercice 6 : Courbe paramétrée et aire

On considère la courbe $\mathcal{C}$ définie par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = \sin(\pi t) \end{cases} \quad \text{pour } t \in [0, 1]$$

- (a) Décrire la trajectoire du point $M(t)(x(t), y(t))$ lorsque t varie de 0 à 1. Quelles sont les coordonnées des points de début et de fin de la courbe ?
- (b) L'aire sous une courbe paramétrée est donnée par la formule $\mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t) dt$. Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 1$.
- (c) En utilisant un raisonnement sur les symétries éventuelles, si on change l'intervalle de t à $[-1, 1]$, quel serait l'impact sur l'aire calculée ? Expliquer sans calcul.

Exercice 7 : Valeur moyenne et interprétation graphique

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Sa valeur moyenne μ sur cet intervalle est donnée par $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

- (a) Interpréter graphiquement la valeur moyenne μ . Dessiner une fonction simple et sa valeur moyenne sur un intervalle donné.
- (b) Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $[1, e]$. Calculer sa valeur moyenne.
- (c) On cherche un réel $c \in [1, e]$ tel que $f(c) = \mu$. Existe-t-il toujours un tel c ? Justifier et, si oui, le déterminer dans ce cas précis.
- (d) Proposer un exemple de fonction et d'intervalle pour lesquels la valeur moyenne est nulle sans que la fonction soit identiquement nulle. Justifier graphiquement.

Exercice 8 : Volume de révolution

Considérons la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \in [0, 4]$. On fait tourner la courbe représentative de f autour de l'axe des abscisses pour former un solide de révolution.

- (a) Rappeler la formule permettant de calculer le volume d'un solide de révolution généré par une fonction f autour de l'axe des abscisses sur un intervalle $[a, b]$.
- (b) Calculer le volume de ce solide.
- (c) Modifier la fonction f pour obtenir un solide de révolution ayant un volume égal à 2π . Expliquer votre démarche.
- (d) Proposer un problème inverse : étant donné un volume V et une fonction f , trouver l'intervalle $[a, b]$ tel que le solide de révolution ait ce volume V . Discuter des conditions d'existence et d'unicité.