

Recueil d'exercices de réflexion - Analyse

1 Suites Numériques et Comportement Asymptotique

Exercice 1 (Modélisation de population). Une population de rongeurs est estimée à 500 individus au début d'une étude. Chaque année, la population diminue naturellement de 10%. Cependant, une intervention humaine ajoute 80 rongeurs à la fin de chaque année.

- Modéliser cette situation par une suite (P_n) où P_n représente la population au début de l'année n . Préciser P_0 .
- On se demande si la population va s'éteindre, se stabiliser, ou croître indéfiniment. Formuler une conjecture argumentée à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice.
- Établir un raisonnement pour déterminer le comportement à long terme de cette population. Que se passerait-il si l'apport annuel était de 30 rongeurs au lieu de 80 ?
- Existe-t-il une valeur d'apport annuel (au lieu de 80) qui permettrait de stabiliser la population à 1000 individus à long terme ? Justifier.

Exercice 2 (Analyse graphique de suites récurrentes). Soit une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ et une suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et un premier terme u_0 .

- Sur un même graphique, tracer une courbe représentative de $y = f(x)$ et la droite $y = x$.
- Dessiner les premiers termes d'une suite (u_n) qui converge vers un point fixe L . Expliquer votre démarche.
- Dans un second cas, dessiner une courbe de f et choisir un u_0 tel que la suite (u_n) diverge. Justifier votre choix.
- Peut-on avoir une suite (u_n) non monotone qui converge vers une limite finie ? Si oui, donner un exemple graphique et expliquer. Sinon, justifier pourquoi.

Exercice 3 (Comparaison et encadrement). On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $v_n = \frac{n}{\sqrt{n}}$.

- Calculer les premiers termes de (u_n) et (v_n) . Que pouvez-vous conjecturer sur leur comportement asymptotique ?
- Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}} \leq \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$ (pour $k \geq 1$, et en adaptant la borne inférieure pour $k = 1$).
- En déduire un encadrement de u_n . Que peut-on conclure sur la limite de (u_n) ?
- La suite (v_n) est-elle un bon "comparateur" pour (u_n) ? Argumenter votre réponse.

2 Fonctions : Continuité, Dérivabilité et Convexité

2.1 Continuité

Exercice 4 (Le théorème du point fixe implicite). Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ telle que $f([a, b]) \subseteq [a, b]$.

- Expliquer ce que signifie $f([a, b]) \subseteq [a, b]$ en termes simples.
- Démontrer qu'il existe au moins un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$. (On pourra considérer la fonction $g(x) = f(x) - x$).
- Est-ce que ce point fixe est nécessairement unique ? Si oui, justifier. Sinon, donner un contre-exemple graphique.
- Pensez-vous que ce théorème pourrait être utile pour étudier la convergence de certaines suites récurrentes ? Argumenter.

Exercice 5 (Problème de la corde nouée). Une corde de longueur L est tendue entre deux points A et B situés à la même hauteur. La corde est ensuite légèrement relâchée et s'affaisse sous son propre poids.

- Sans faire de calculs complexes, expliquer en quoi le théorème des valeurs intermédiaires pourrait garantir l'existence d'un point sur la corde qui se trouve à une hauteur donnée h entre la hauteur de A/B et le point le plus bas de la corde.
- Si l'on ne connaissait pas la forme exacte de la corde, mais seulement sa continuité, quelles informations supplémentaires faudrait-il pour garantir qu'un tel point existe *une seule fois* ?
- Supposons que l'on modélise la forme de la corde par une fonction $f(x)$ sur un intervalle $[0, D]$ (où D est la distance horizontale entre A et B). Comment la notion de continuité et de dérivabilité s'appliquent-elles à la "douceur" de la courbe de la corde ?

2.2 Dérivabilité et Optimisation

Exercice 6 (Optimisation d'un réservoir). Vous devez concevoir un réservoir cylindrique ouvert (sans couvercle supérieur) d'un volume V donné. Le coût du matériau est proportionnel à la surface du réservoir.

- Modéliser la surface du réservoir en fonction de son rayon r et de sa hauteur h .
- Exprimer cette surface comme une fonction d'une seule variable (par exemple r).
- Déterminer les dimensions (r et h) qui minimisent la quantité de matériau nécessaire pour fabriquer ce réservoir. Justifier rigoureusement votre résultat.
- Quel serait l'impact sur les dimensions optimales si le réservoir devait avoir un couvercle ? Sans refaire tous les calculs, expliquer la démarche.

Exercice 7 (Vitesse maximale sur une pente). Un objet glisse sans frottement le long d'une piste modélisée par la fonction $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. On sait qu'il y a un point d'inflexion en x_0 et que la pente est nulle en un certain point.

- a) Expliquer ce que signifie un point d'inflexion pour une piste. Comment cela se traduit-il mathématiquement sur la fonction f ?
- b) Si la vitesse de l'objet est liée à la pente de la piste (plus la pente est forte, plus il y a d'accélération), comment pourriez-vous utiliser la dérivée pour trouver les points où l'objet atteindrait sa vitesse maximale (en descente) ou minimale (en montée) ?
- c) Comment la convexité/concavité de la piste influence-t-elle le comportement de la vitesse de l'objet ?

2.3 Fonction exponentielle et logarithme népérien

Exercice 8 (Analyse de courbes de croissance comparées). On considère les fonctions $f(x) = x \ln(x)$, $g(x) = x^2$ et $h(x) = e^x$.

- a) Sans utiliser de calculatrice, comparer intuitivement la croissance de ces trois fonctions lorsque x tend vers $+\infty$. Justifier.
- b) Calculer les limites de $\frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{g(x)}{h(x)}$ et $\frac{f(x)}{h(x)}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Ces résultats confirment-ils votre intuition ?
- c) Proposer une situation concrète (modélisation, économie, biologie...) où l'une de ces fonctions serait plus adaptée que les autres pour décrire un phénomène de croissance.
- d) Existe-t-il une fonction de la forme x^a qui croît plus lentement que $x \ln x$ pour tout $a > 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$? Argumenter.

Exercice 9 (Problème du temps de doublement/division). La quantité d'une substance radioactive diminue de moitié tous les 10 ans.

- a) Modéliser la quantité $Q(t)$ de cette substance en fonction du temps t (en années), sachant qu'à $t = 0$ on a une quantité Q_0 .
- b) Déterminer le temps nécessaire pour que la quantité de substance soit réduite à 10% de sa valeur initiale.
- c) Si on dispose de 1 kg de cette substance, quel est le temps nécessaire pour qu'il n'en reste plus qu'un gramme ?
- d) Discuter de la pertinence d'utiliser le logarithme népérien pour résoudre ce type de problème, par rapport à d'autres bases de logarithmes.

3 Intégration et Applications

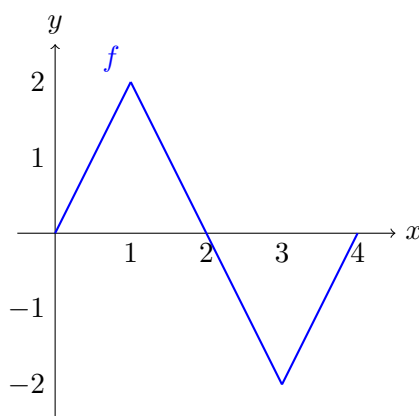
3.1 Primitives et Interprétation

Exercice 10 (Vitesse, Accélération, et Distance). Un véhicule part d'un point A à l'instant $t = 0$ avec une vitesse initiale nulle. Son accélération est donnée par la fonction $a(t) = 6t - 12$ (en m/s^2).

- a) Déterminer la fonction de vitesse $v(t)$ du véhicule. À quel instant la vitesse est-elle maximale (ou minimale) pendant les 5 premières secondes ?

- b) Déterminer la fonction de position $s(t)$ du véhicule (distance parcourue depuis A).
- c) À l'aide d'une intégrale, calculer la distance parcourue par le véhicule entre $t = 0$ et $t = 3$ secondes.
- d) Comment interprétez-vous un résultat d'intégrale négatif pour une fonction de vitesse ? (Par exemple, si vous intégrez de $t = 0$ à $t = 2$?) Expliquer la distinction entre "distance parcourue" et "changement de position".

Exercice 11 (Détermination graphique de primitives). Soit f une fonction dont la courbe représentative est donnée ci-dessous :



- a) Esquisser l'allure d'une primitive F de f , sachant que $F(0) = 0$.
- b) Identifier les intervalles sur lesquels F est croissante/décroissante et les points où F atteint un extremum. Justifier votre réponse.
- c) Esquisser l'allure de F si $F(0) = 2$. Comment cela affecte-t-il la forme de la courbe ?
- d) Peut-on dire si F est convexe ou concave sur certains intervalles à partir du graphique de f ? Expliquer.

3.2 Intégrales définies et Valeur Moyenne

Exercice 12 (Analyse d'un débit d'eau). Le débit d'eau d'un robinet qui fuit est modélisé par $D(t) = 0.5e^{-0.1t}$ (en litres par minute) où t est le temps en minutes depuis le début de l'observation.

- a) Quelle quantité d'eau s'est écoulée pendant les 10 premières minutes ? (Exprimer la réponse avec une intégrale, puis la calculer).
- b) Quelle est la valeur moyenne du débit sur cet intervalle de temps ? Interpréter ce résultat.
- c) Le débit diminuera-t-il indéfiniment ? Quelle est la quantité totale d'eau qui s'écoulera si le robinet fuit éternellement ? (Ceci introduit une notion de limite d'intégrale, mais peut être discuté intuitivement).
- d) Si l'eau coûte 0.002 € par litre, quel est le coût de la fuite sur les 10 premières minutes ?

Exercice 13 (Comparaison d'aires). Soient les fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

- a) Sur un même graphique, tracer les courbes de f et g sur l'intervalle $[0, 1]$.
- b) Sans calculer les intégrales, mais en utilisant le graphique et les propriétés des fonctions, classer par ordre croissant les valeurs de $\int_0^1 f(x) dx$, $\int_0^1 g(x) dx$, et $\int_0^1 (g(x) - f(x)) dx$. Justifier votre raisonnement.
- c) La propriété de linéarité des intégrales est-elle toujours valide lorsque les fonctions sont négatives sur l'intervalle d'intégration ? Expliquer et donner un exemple simple.