

Exercices d'application - Analyse

1 Suites numériques

1.1 Limites de suites

Exercice 1. Déterminer la limite de chacune des suites suivantes, si elle existe.

a) $u_n = 3n^2 - 5n + 1$

b) $v_n = -2n^3 + 7n - 4$

c) $w_n = \frac{4n+1}{2n-3}$

d) $x_n = \frac{n^2-2n+5}{3n+2}$

e) $y_n = \frac{n+1}{n^2+1}$

f) $z_n = \frac{e^n}{n^2}$

g) $a_n = ne^{-n}$

h) $b_n = \frac{\ln(n)}{n}$

Exercice 2. Dans chaque cas, la suite est définie pour $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

a) $u_n = (-1)^n$

b) $u_n = \frac{\cos(n)}{n}$

c) $u_n = \frac{2n - \sin(n)}{n+1}$

d) $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

e) $u_n = (-3)^n$

f) $u_n = (0.99)^n + n$

g) $u_n = \frac{2^n + 3^n}{3^n}$

h) $u_n = \frac{5^n}{3^{2n}}$

Exercice 3. Soit la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \sqrt{n^2 + n} - n$.

a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n}$.

b) En déduire la limite de la suite (u_n) .

1.2 Convergences et suites monotones

Exercice 4. Étudier la monotonie des suites suivantes :

- a) $u_n = 2n^2 - 3n + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$
- b) $v_n = \frac{n+1}{n+2}$ pour $n \in \mathbb{N}$
- c) $w_n = (-1)^n n$ pour $n \in \mathbb{N}$
- d) $x_n = 2^n - n$ pour $n \in \mathbb{N}$

Exercice 5. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- a) Calculer les trois premiers termes de la suite.
- b) Conjecturer la monotonie et la limite de la suite (u_n) .
- c) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 6$.
- d) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
- e) En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 6. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- a) Calculer u_1 et u_2 .
- b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$.
- c) Étudier la monotonie de la suite (u_n) . (On pourra étudier le signe de $f(x) - x$ où $f(x) = \sqrt{x+2}$)
- d) En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 7. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$. On admet que la suite est croissante.

- a) Montrer par l'absurde que la suite (u_n) ne peut pas converger vers un réel $L > 1$.
- b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.
- c) Si la suite (u_n) converge vers un réel L , que vaut L ?
- d) La suite (u_n) converge-t-elle ? Justifier votre réponse.

2 Fonctions : Limites et continuité

2.1 Limites des fonctions

Exercice 8. Déterminer les limites des fonctions suivantes aux bornes de leur ensemble de définition.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$

b) $g(x) = \frac{3x-1}{x+2}$

c) $h(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2}$ (en 2)

d) $k(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ (en $+\infty$)

e) $l(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ (en 0)

f) $m(x) = xe^x$ (en $-\infty$)

g) $n(x) = \frac{e^x}{x^3}$ (en $+\infty$)

h) $p(x) = x \ln(x)$ (en 0^+)

i) $q(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ (en $+\infty$)

Exercice 9. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-1}$.

- a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- b) Montrer que la droite d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- c) La courbe représentative de f admet-elle une asymptote verticale ? Si oui, donner son équation.

Exercice 10. Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \frac{x^2+e^x}{x}$.

- a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- c) La fonction g admet-elle une asymptote oblique en $+\infty$? Si oui, donner son équation.

2.2 Continuité des fonctions

Exercice 11. Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Exercice 12. Déterminer la valeur de a pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Exercice 13. Montrer que l'équation $x^3 + 2x - 1 = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0, 1]$. On précisera un encadrement d'amplitude 0.1 de cette solution.

Exercice 14. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$.

- a) Démontrer qu'il existe au moins un réel $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$.
- b) La solution est-elle unique ? Justifier.

Exercice 15. Soit $f(x) = xe^x - 1$.

- a) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
- b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
- c) Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

3 Dérivabilité et Convexité

3.1 Dérivabilité

Exercice 16. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

- a) $f(x) = (3x^2 - 1)^4$
- b) $g(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$
- c) $h(x) = x\sqrt{x}$
- d) $k(x) = \ln(x^2 + 1)$
- e) $l(x) = e^{3x^2-2x}$
- f) $m(x) = \cos(5x - \pi/4)$
- g) $n(x) = x^2 \ln x$
- h) $p(x) = \frac{e^x}{x}$

Exercice 17. Soit $f(x) = (x - 1)e^x$.

- a) Calculer la dérivée $f'(x)$.
- b) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f .
- c) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- d) Dresser le tableau de variations complet de f .

Exercice 18. On considère la fonction $g(x) = \frac{x^2}{2} - \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$.

- a) Calculer $g'(x)$.
- b) Étudier le signe de $g'(x)$ et en déduire les variations de g .
- c) Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
- d) Dresser le tableau de variations complet de g .

Exercice 19. Soit $f(x) = (ax + b)e^{-x}$. Déterminer a et b tels que $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$.

3.2 Convexité

Exercice 20. Déterminer les intervalles sur lesquels les fonctions suivantes sont convexes ou concaves.

- a) $f(x) = x^4 - 6x^2 + x$
- b) $g(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$
- c) $h(x) = e^{-x^2}$
- d) $k(x) = x \ln x$ sur $]0, +\infty[$

Exercice 21. On considère la fonction $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$.

- a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
- b) Étudier le signe de $f''(x)$.
- c) En déduire les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.
- d) Déterminer les coordonnées des points d'inflexion, s'il y en a.

Exercice 22. Soit $g(x) = \ln(x^2 + 1)$.

- a) Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.
- b) Étudier le signe de $g''(x)$.
- c) Préciser les intervalles de convexité/concavité de g .
- d) La courbe représentative de g admet-elle des points d'inflexion ? Si oui, donner leurs coordonnées.

4 Fonction logarithme népérien et fonction exponentielle

4.1 Fonction logarithme népérien ($\ln$)

Exercice 23. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

- a) $\ln(x+2) = 0$
- b) $\ln(3x-1) = 2$
- c) $\ln(x^2-1) = \ln(3)$
- d) $\ln(x) > 1$
- e) $\ln(2x+1) \leq 0$
- f) $(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 = 0$ (Poser $X = \ln x$)

Exercice 24. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

- a) $f(x) = \ln(4-x)$
- b) $g(x) = \ln(x^2-5x+6)$
- c) $h(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$

Exercice 25. Calculer les limites suivantes :

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x)$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^3+1)}{x}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(\sqrt{x})$
- e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

4.2 Fonction exponentielle (exp ou e^x)

Exercice 26. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

- a) $e^{x-1} = 1$
- b) $e^{2x+3} = e$
- c) $e^x + 2e^{-x} = 3$ (Poser $X = e^x$)
- d) $e^x < 2$
- e) $e^{x^2} \geq e^{x+2}$
- f) $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$

Exercice 27. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$

b) $g(x) = \sqrt{e^x - 3}$

c) $h(x) = \ln(e^x - 2)$

Exercice 28. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^x)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - e^x)$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x}{e^x + 1}$

5 Intégration

5.1 Primitives

Exercice 29. Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$

b) $g(x) = \frac{1}{x^3}$

c) $h(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

d) $k(x) = e^{5x}$

e) $l(x) = \cos(2x + 1)$

f) $m(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

g) $n(x) = xe^{x^2}$

h) $p(x) = (3x + 1)^4$

i) $q(x) = \sin(x) \cos^2(x)$

Exercice 30. Déterminer la primitive F de $f(x) = x^2 - x + 1$ qui vérifie $F(2) = 1$.

Exercice 31. Déterminer la primitive G de $g(x) = \frac{1}{2x+3}$ sur $] -\frac{3}{2}, +\infty[$ qui vérifie $G(-1) = 0$.

Exercice 32. Soit $f(x) = xe^x$.

a) Vérifier que $F(x) = (x - 1)e^x$ est une primitive de $f(x)$.

b) En déduire la primitive de f qui s'annule en 0.

5.2 Intégrales

Exercice 33. Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 (x^2 - x + 1) dx$

b) $\int_{-1}^1 (3x^3 + 2x) dx$

c) $\int_1^e \frac{1}{x} dx$

d) $\int_0^{\ln 2} e^x dx$

e) $\int_0^{\pi/2} \sin(x) dx$

f) $\int_1^2 \frac{1}{(2x-1)^2} dx$

Exercice 34. Soit $f(x) = 2x - 3$.

a) Calculer $\int_0^3 f(x) dx$.

b) Interpréter graphiquement le résultat.

Exercice 35. Calculer la valeur moyenne de la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[0, 3]$.

Exercice 36. Soit $f(x) = xe^{-x^2}$.

a) Déterminer une primitive $F(x)$ de $f(x)$.

b) Calculer $\int_0^1 f(x) dx$.

Exercice 37. Comparaison d'intégrales.

a) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $x^2 \leq x$.

b) En déduire que $\int_0^1 x^2 dx \leq \int_0^1 x dx$. Vérifier par le calcul.

Exercice 38. Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$.

a) Calculer $\int_1^2 f(x) dx$.

b) Calculer la valeur moyenne de f sur $[1, 2]$.