

Raisonnement par récurrence

ExoMaths.fr

Juin 2025

Table des matières

1	Introduction au raisonnement par récurrence	2
1.1	Principe de la récurrence	2
2	Mise en œuvre du raisonnement par récurrence	2
3	Exemples commentés	3
3.1	Exemple 1 : Somme des premiers entiers	3
3.2	Exemple 2 : Inégalité de Bernoulli	4
3.3	Exemple 3 : Propriété sur les suites définies par récurrence	4

1 Introduction au raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence est une méthode de démonstration fondamentale en mathématiques, particulièrement utile pour prouver des propriétés qui dépendent d'un entier naturel n . Il permet de démontrer qu'une propriété est vraie pour tous les entiers naturels à partir d'un certain rang. Il s'apparente à l'idée d'une suite de dominos qui tombent : si le premier domino tombe et que chaque domino fait tomber le suivant, alors tous les dominos tomberont.

1.1 Principe de la récurrence

Le principe de la récurrence repose sur deux étapes clés :

1. **Initialisation** : Montrer que la propriété est vraie pour la première valeur de n (le "premier domino tombe").
2. **Hérédité** : Montrer que si la propriété est vraie pour un certain n (le "domino n " tombe), alors elle est aussi vraie pour $n + 1$ (il fait tomber le "domino $n + 1$ ").

Si ces deux conditions sont remplies, alors la propriété est vraie pour tous les entiers naturels à partir de la valeur initiale.

Théorème

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n . Pour prouver que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$ (où n_0 est un entier fixé, souvent 0 ou 1), on procède en deux étapes :

1. **Initialisation** : Vérifier que la propriété $P(n_0)$ est vraie.
2. **Hérédité** : Supposer que la propriété $P(k)$ est vraie pour un entier $k \geq n_0$ quelconque (c'est l'hypothèse de récurrence), et démontrer qu'alors la propriété $P(k + 1)$ est vraie.

Si ces deux conditions sont vérifiées, alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Remarque

L

Le choix de n_0 est crucial. Il dépend de l'énoncé de la propriété à démontrer. Souvent $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$.

2 Mise en œuvre du raisonnement par récurrence

Pour rédiger une démonstration par récurrence, il est impératif de suivre une structure rigoureuse.

Point de méthode

Voici les étapes à suivre pour rédiger une démonstration par récurrence :

1. **Définir la propriété** : Énoncer clairement la propriété $P(n)$ que l'on souhaite démontrer. Préciser pour quels entiers n elle est censée être vraie.
2. **Initialisation** :
 - Choisir la valeur de départ n_0 (souvent $n = 0$ ou $n = 1$).
 - Vérifier que $P(n_0)$ est vraie en remplaçant n par n_0 dans l'expression de $P(n)$.
 - Conclure que la propriété est initialisée.
3. **Hérédité** :
 - Fixer un entier $k \geq n_0$.
 - **Hypothèse de récurrence (HR)** : Supposer que $P(k)$ est vraie. C'est-à-dire, écrire explicitement ce que signifie $P(k)$ est vraie.
 - **But** : Démontrer que $P(k+1)$ est vraie. C'est-à-dire, écrire explicitement ce que signifie $P(k+1)$ est vraie.
 - Effectuer les calculs ou le raisonnement nécessaires pour passer de $P(k)$ à $P(k+1)$. C'est souvent l'étape la plus complexe.
 - Conclure que la propriété est héréditaire.
4. **Conclusion** : Conclure la démonstration en réaffirmant que, puisque la propriété est initialisée et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Remarque

U

ne erreur fréquente est de confondre l'hypothèse de récurrence ($P(k)$ est vraie) et le but ($P(k+1)$ est vraie). Il faut bien partir de $P(k)$ pour arriver à $P(k+1)$.

3 Exemples commentés

3.1 Exemple 1 : Somme des premiers entiers

Démontrons par récurrence la propriété suivante : pour tout entier naturel non nul n , la somme des n premiers entiers est donnée par la formule $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

1. Définition de la propriété : Soit $P(n)$ la propriété : " $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ". Nous voulons démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Le premier entier est donc $n_0 = 1$.

2. Initialisation : Vérifions si $P(1)$ est vraie. Pour $n = 1$, la somme est 1. La formule donne $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$. Puisque $1 = 1$, la propriété $P(1)$ est vraie. La propriété est initialisée au rang 1.

3. Hérédité : Supposons que $P(k)$ est vraie pour un certain entier $k \geq 1$. **Hypothèse de récurrence (HR)** : $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. **But** : Démontrons que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Partons du membre de gauche de l'égalité de $P(k+1)$: $1 + 2 + \dots + k + (k+1)$. En utilisant l'hypothèse de récurrence ($1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$), on peut remplacer la somme des k premiers termes : $1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$. Factorisons par $(k+1)$: $= (k+1) \left(\frac{k}{2} + 1 \right)$. Mettons au même dénominateur l'expression entre parenthèses : $= (k+1) \left(\frac{k}{2} + \frac{2}{2} \right) = (k+1) \left(\frac{k+2}{2} \right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Nous avons bien obtenu le membre de droite de l'égalité pour $P(k+1)$. Donc, si $P(k)$ est vraie, alors $P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.

4. Conclusion : La propriété $P(n)$ est initialisée au rang 1 et est héréditaire. Par conséquent, d'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n . Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

3.2 Exemple 2 : Inégalité de Bernoulli

Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 0$ et pour tout réel $x \geq -1$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

1. Définition de la propriété : Soit $P(n)$ la propriété : " $(1+x)^n \geq 1+nx$ ". Nous voulons démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $n_0 = 0$. Le réel $x \geq -1$ est fixé.

2. Initialisation : Vérifions si $P(0)$ est vraie. Pour $n = 0$: Membre de gauche : $(1+x)^0 = 1$ (pour $1+x \neq 0$, ce qui est le cas si $x \neq -1$. Si $x = -1$, alors $(-1+1)^0 = 0^0$ est indéterminé, mais dans le contexte des puissances, $0^0 = 1$ est souvent utilisé par convention. Si $x = -1$, l'inégalité devient $0^0 \geq 1+0(-1)$, soit $1 \geq 1$, ce qui est vrai). Membre de droite : $1+0x = 1$. Puisque $1 \geq 1$, la propriété $P(0)$ est vraie. La propriété est initialisée au rang 0.

3. Hérédité : Supposons que $P(k)$ est vraie pour un certain entier $k \geq 0$. **Hypothèse de récurrence (HR) :** $(1+x)^k \geq 1+kx$. **But :** Démontrons que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$.

Partons du membre de gauche de l'inégalité de $P(k+1)$: $(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x)$. D'après l'hypothèse de récurrence, $(1+x)^k \geq 1+kx$. Puisque $x \geq -1$, on a $1+x \geq 0$. On peut donc multiplier l'inégalité de l'HR par $(1+x)$ sans changer le sens de l'inégalité : $(1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x)$. Développons le membre de droite : $(1+kx)(1+x) = 1 \times 1 + 1 \times x + kx \times 1 + kx \times x = 1+x+kx+kx^2 = 1+(1+k)x+kx^2 = 1+(k+1)x+kx^2$.

Nous avons donc $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x+kx^2$. Or, nous voulons démontrer que $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$. Il suffit de montrer que $1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x$. Ceci est équivalent à $kx^2 \geq 0$. Puisque k est un entier naturel ($k \geq 0$) et x^2 est toujours positif ou nul, le produit kx^2 est toujours positif ou nul. Donc, $kx^2 \geq 0$ est vrai. Ainsi, $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x$. D'où, $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$. Si $P(k)$ est vraie, alors $P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.

4. Conclusion : La propriété $P(n)$ est initialisée au rang 0 et est héréditaire. Par conséquent, d'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \geq -1$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

3.3 Exemple 3 : Propriété sur les suites définies par récurrence

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n < 6$.

1. Définition de la propriété : Soit $P(n)$ la propriété : " $u_n < 6$ ". Nous voulons démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $n_0 = 0$.

2. Initialisation : Vérifions si $P(0)$ est vraie. Pour $n = 0$, $u_0 = 1$. Puisque $1 < 6$, la propriété $P(0)$ est vraie. La propriété est initialisée au rang 0.

3. Hérédité : Supposons que $P(k)$ est vraie pour un certain entier $k \geq 0$. **Hypothèse de récurrence (HR) :** $u_k < 6$. **But :** Démontrons que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+1} < 6$.

Nous savons que $u_{k+1} = \frac{1}{2}u_k + 3$. En utilisant l'hypothèse de récurrence $u_k < 6$: Multiplions l'inégalité par $\frac{1}{2}$ (qui est positif, donc l'ordre est conservé) : $\frac{1}{2}u_k < \frac{1}{2} \times 6$ $\frac{1}{2}u_k < 3$. Ajoutons 3 à chaque membre de l'inégalité : $\frac{1}{2}u_k + 3 < 3 + 3$ $u_{k+1} < 6$. Nous avons bien obtenu $u_{k+1} < 6$. Donc, si $P(k)$ est vraie, alors $P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.

4. Conclusion : La propriété $P(n)$ est initialisée au rang 0 et est héréditaire. Par conséquent, d'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n . Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 6$.