

Polycopié de cours : Algèbre

Lycée ...
Terminale Spécialité Mathématiques

Année scolaire 2024-2025

Table des matières

1	Introduction au Dénombrement	3
1.1	Vocabulaire et principes fondamentaux	3
2	Listes avec répétitions (p-listes)	4
3	Permutations	4
3.1	Permutations avec répétitions	5
4	Arrangements sans répétition	5
5	Combinaisons	6
5.1	Triangle de Pascal	7
6	Formule du binôme de Newton	8

1 Introduction au Dénombrement

Le dénombrement est l'art de compter. Il s'agit de déterminer le nombre de manières de réaliser une certaine tâche ou de former un ensemble d'objets, souvent sous des contraintes spécifiques. Cette branche des mathématiques est fondamentale en probabilités, en informatique et dans de nombreux autres domaines.

1.1 Vocabulaire et principes fondamentaux

Définition

Un **ensemble fini** est un ensemble qui contient un nombre fini d'éléments. Le nombre d'éléments d'un ensemble E est appelé son **cardinal**, noté $\text{card}(E)$ ou $|E|$.

Exemple

L'ensemble des chiffres $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ est un ensemble fini de cardinal $\text{card}(C) = 10$.

Propriété

Principe additif

Si une tâche T_1 peut être réalisée de n_1 manières et une tâche T_2 peut être réalisée de n_2 manières, et si ces deux tâches sont mutuellement exclusives (on ne peut pas réaliser les deux en même temps), alors le nombre total de manières de réaliser T_1 **ou** T_2 est $n_1 + n_2$.

Plus généralement, si des ensembles $E_1, E_2, \dots, E_k$ sont finis et deux à deux disjoints, alors $\text{card}(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k) = \text{card}(E_1) + \text{card}(E_2) + \dots + \text{card}(E_k)$.

Exemple

Une bibliothèque propose 15 romans policiers et 20 romans de science-fiction. Un élève souhaite emprunter un seul livre. Il a $15 + 20 = 35$ choix possibles.

Propriété

Principe multiplicatif

Si une tâche est composée de k étapes successives, et si la première étape peut être réalisée de n_1 manières, la deuxième de n_2 manières (quel que soit le choix de la première étape), ..., et la k -ième de n_k manières, alors le nombre total de manières de réaliser la tâche est le produit $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$.

Exemple

Une personne doit choisir un menu composé d'une entrée parmi 3, d'un plat parmi 5 et d'un dessert parmi 4. Le nombre de menus différents qu'elle peut composer est $3 \times 5 \times 4 = 60$.

Remarque

Le principe multiplicatif est fondamental et sera utilisé dans toutes les formules de dénombrement qui suivent. Il correspond au cardinal d'un produit cartésien d'ensembles. Si $E_1, E_2, \dots, E_k$ sont des ensembles finis, alors $\text{card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k) = \text{card}(E_1) \times \text{card}(E_2) \times \dots \times \text{card}(E_k)$.

2 Listes avec répétitions (p -listes)

Définition

Étant donné un ensemble E à n éléments ($n = \text{card}(E)$), une **p -liste** d'éléments de E est une suite ordonnée de p éléments de E , avec répétitions possibles.

Propriété

Le nombre de p -listes d'un ensemble à n éléments est n^p .

Point de méthode

Dénombrer des p -listes

1. Identifier l'ensemble de départ E et son cardinal n .
2. Identifier la longueur p de la liste (le nombre d'éléments à choisir).
3. Vérifier si l'ordre compte et si les répétitions sont autorisées. Si oui, il s'agit de p -listes.
4. Le nombre de possibilités est n^p .

Exemple

Combien de codes PIN à 4 chiffres peut-on former ?

- L'ensemble des chiffres est $E = \{0, 1, \dots, 9\}$, donc $n = 10$.
- Un code PIN a 4 chiffres, donc $p = 4$.
- L'ordre des chiffres compte (1234 est différent de 4321) et les répétitions sont autorisées (1111 est un code valide).

Il s'agit donc de 4-listes de chiffres. Le nombre de codes PIN possibles est $10^4 = 10\,000$.

Exemple

Un questionnaire à choix multiples (QCM) comporte 5 questions. Pour chaque question, 3 réponses sont proposées (A, B, C). Combien y a-t-il de grilles de réponses possibles ?

- L'ensemble des réponses pour une question est $E = \{A, B, C\}$, donc $n = 3$.
- Il y a 5 questions, donc une grille est une 5-liste de réponses, $p = 5$.
- L'ordre des réponses compte (réponse à Q1, Q2, etc.) et les répétitions sont autorisées (on peut cocher A pour toutes les questions).

Le nombre de grilles possibles est $3^5 = 243$.

3 Permutations

Définition

Étant donné un ensemble E à n éléments, une **permutation** de E est un arrangement de tous les éléments de E dans un ordre donné. C'est donc une n -liste des éléments de E sans répétition.

Propriété

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$ (lire " n factorielle"). On définit $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$. Par convention, $0! = 1$.

Exemple

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Point de méthode

Dénombrer des permutations

1. Identifier l'ensemble de départ E et son cardinal n .
2. Vérifier si tous les éléments de E sont utilisés.
3. Vérifier si l'ordre compte et si les répétitions sont interdites. Si oui, il s'agit de permutations.
4. Le nombre de possibilités est $n!$.

Exemple

De combien de manières différentes 4 personnes peuvent-elles s'asseoir sur 4 chaises alignées ?

- Il y a 4 personnes et 4 chaises, donc $n = 4$.
- Toutes les personnes sont placées, l'ordre dans lequel elles s'assoient sur les chaises compte.

Il s'agit de permutations de 4 éléments. Le nombre de manières est $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Remarque

Une permutation est un cas particulier d'arrangement sans répétition où $p = n$.

3.1 Permutations avec répétitions

Bien que le programme se concentre sur les permutations d'éléments distincts, il est utile de savoir comment traiter les cas où certains éléments sont identiques.

Propriété

Le nombre de permutations d'un ensemble de n éléments dans lequel n_1 éléments sont identiques d'un type, n_2 éléments sont identiques d'un deuxième type, ..., n_k éléments sont identiques d'un k -ième type (avec $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$) est :

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

Exemple

Combien d'anagrammes peut-on former avec le mot "ANANAS" ? Le mot "ANANAS" a $n = 6$ lettres.

- La lettre 'A' apparaît $n_A = 3$ fois.
- La lettre 'N' apparaît $n_N = 2$ fois.
- La lettre 'S' apparaît $n_S = 1$ fois.

Le nombre d'anagrammes est $\frac{6!}{3! \times 2! \times 1!} = \frac{720}{6 \times 2 \times 1} = \frac{720}{12} = 60$.

4 Arrangements sans répétition

Définition

Étant donné un ensemble E à n éléments, un **arrangement de p éléments** de E (avec $p \leq n$) est une suite ordonnée de p éléments distincts de E .

Propriété

Le nombre d'arrangements de p éléments parmi n est noté A_n^p ou $P(n, p)$ et est donné par la formule :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$$

Point de méthode**Dénombrer des arrangements sans répétition**

1. Identifier l'ensemble de départ E et son cardinal n .
2. Identifier le nombre d'éléments à choisir p .
3. Vérifier si l'ordre compte et si les répétitions sont interdites. Si oui, il s'agit d'arrangements sans répétition.
4. Le nombre de possibilités est A_n^p .

Exemple

Un club de 10 coureurs participe à une course. Seuls les 3 premiers sont récompensés (1er, 2e, 3e). Combien y a-t-il de podiums possibles ?

- L'ensemble des coureurs a $n = 10$ éléments.
- On choisit 3 coureurs pour le podium, donc $p = 3$.
- L'ordre compte (être 1er n'est pas la même chose qu'être 2e), et un coureur ne peut être récompensé qu'une seule fois (pas de répétition).

Il s'agit donc d'arrangements de 3 coureurs parmi 10. $A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$. Il y a 720 podiums possibles.

Remarque

Un arrangement peut être vu comme une p -liste où les éléments sont tous distincts. Si $p = n$, alors $A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$, ce qui correspond bien aux permutations.

5 Combinaisons

Définition

Étant donné un ensemble E à n éléments, une **combinaison de p éléments** de E (avec $p \leq n$) est un sous-ensemble de E de p éléments. L'ordre des éléments n'a pas d'importance et il n'y a pas de répétition.

Propriété

Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est noté $\binom{n}{p}$ (lire " p parmi n ") et est donné par la formule :

$$\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Ces nombres sont appelés **coefficients binomiaux**.

Remarque

La formule $\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!}$ s'explique par le fait qu'une combinaison est un arrangement dont on a "ignoré" l'ordre. Puisqu'il y a $p!$ façons d'ordonner p éléments, on divise le nombre d'arrangements par $p!$ pour obtenir le nombre de combinaisons.

Propriété

Propriétés des coefficients binomiaux

- $\binom{n}{0} = 1$ (Il y a une seule façon de choisir 0 élément : ne rien choisir).
- $\binom{n}{n} = 1$ (Il y a une seule façon de choisir n éléments : choisir tous les éléments).
- $\binom{n}{1} = n$ (Il y a n façons de choisir 1 élément).
- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ (Symétrie : choisir p éléments revient à en laisser $n - p$).
- **Relation de Pascal** : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ pour $0 \leq p < n$. Cette relation permet de construire le Triangle de Pascal.

Point de méthode

Dénombrer des combinaisons

1. Identifier l'ensemble de départ E et son cardinal n .
2. Identifier le nombre d'éléments à choisir p .
3. Vérifier si l'ordre **ne compte pas** et si les répétitions sont interdites. Si oui, il s'agit de combinaisons.
4. Le nombre de possibilités est $\binom{n}{p}$.

Exemple

Dans une classe de 25 élèves, on doit élire 3 délégués. Combien de groupes de délégués différents peut-on former ?

- L'ensemble des élèves a $n = 25$ éléments.
- On choisit 3 délégués, donc $p = 3$.
- L'ordre n'a pas d'importance (être élu en premier ou en troisième ne change rien au fait d'être délégué), et un élève ne peut être choisi qu'une fois.

Il s'agit donc de combinaisons de 3 élèves parmi 25.

$$\binom{25}{3} = \frac{25!}{3!(25-3)!} = \frac{25!}{3!22!} = \frac{25 \times 24 \times 23}{3 \times 2 \times 1} = 25 \times 4 \times 23 = 2300$$

Il y a 2300 groupes de délégués différents.

Exemple

Une main au poker est composée de 5 cartes tirées d'un jeu de 52 cartes. Combien de mains différentes peut-on former ?

- L'ensemble des cartes a $n = 52$ éléments.
- On tire 5 cartes, donc $p = 5$.
- L'ordre des cartes tirées n'a pas d'importance (avoir As de pique puis Roi de cœur, ou l'inverse, donne la même main), et les cartes ne sont pas remises dans le jeu (pas de répétition).

Il s'agit donc de combinaisons de 5 cartes parmi 52.

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!47!} = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 2\,598\,960$$

Il y a 2 598 960 mains différentes.

5.1 Triangle de Pascal

Le Triangle de Pascal est une disposition triangulaire des coefficients binomiaux, où chaque nombre est la somme des deux nombres directement au-dessus de lui. Il est construit en utilisant

la relation de Pascal.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & n=0 & & \\
 & & & & \binom{0}{0} & & \\
 & & & n=1 & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \\
 & & n=2 & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \\
 & n=3 & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\
 n=4 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \\
 n=5 & \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5}
 \end{array}$$

Remarque

Chaque nombre dans le triangle de Pascal est la somme des deux nombres situés directement au-dessus de lui. Par exemple, $\binom{4}{2} = 6$ est la somme de $\binom{3}{1} = 3$ et $\binom{3}{2} = 3$.

6 Formule du binôme de Newton

La formule du binôme de Newton permet de développer des expressions de la forme $(a+b)^n$. Les coefficients de ce développement sont les coefficients binomiaux.

Théorème

Formule du binôme de Newton

Pour tous nombres réels a et b , et pour tout entier naturel n , on a :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

Ce qui peut être écrit plus explicitement :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Remarque

Le symbole $\sum$ (sigma majuscule) indique une somme. Ici, on somme les termes $\binom{n}{p} a^{n-p} b^p$ pour p allant de 0 à n .

Point de méthode

Développer une expression avec la formule du binôme

1. Identifier a , b et n dans l'expression $(a+b)^n$.
2. Écrire la somme des termes en utilisant la formule générale.
3. Calculer les coefficients binomiaux $\binom{n}{p}$ pour chaque p (en utilisant la formule ou le triangle de Pascal).
4. Simplifier chaque terme.

Exemple

Développer $(x + y)^3$. Ici, $a = x$, $b = y$, et $n = 3$.

$$(x + y)^3 = \binom{3}{0}x^3y^0 + \binom{3}{1}x^2y^1 + \binom{3}{2}x^1y^2 + \binom{3}{3}x^0y^3$$

Calculons les coefficients binomiaux (on peut utiliser le Triangle de Pascal pour $n = 3$, ligne 1, 3, 3, 1) : $\binom{3}{0} = 1$ $\binom{3}{1} = 3$ $\binom{3}{2} = 3$ $\binom{3}{3} = 1$ Donc,

$$(x + y)^3 = 1 \cdot x^3 \cdot 1 + 3 \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot x \cdot y^2 + 1 \cdot 1 \cdot y^3$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Exemple

Développer $(2x - 1)^4$. Ici, $a = 2x$, $b = -1$, et $n = 4$.

$$(2x - 1)^4 = \sum_{p=0}^4 \binom{4}{p} (2x)^{4-p} (-1)^p$$

Calculons les coefficients binomiaux (Triangle de Pascal pour $n = 4$, ligne 1, 4, 6, 4, 1) :

$$p = 0 : \binom{4}{0} (2x)^4 (-1)^0 = 1 \cdot (16x^4) \cdot 1 = 16x^4$$

$$p = 1 : \binom{4}{1} (2x)^3 (-1)^1 = 4 \cdot (8x^3) \cdot (-1) = -32x^3$$

$$p = 2 : \binom{4}{2} (2x)^2 (-1)^2 = 6 \cdot (4x^2) \cdot 1 = 24x^2$$

$$p = 3 : \binom{4}{3} (2x)^1 (-1)^3 = 4 \cdot (2x) \cdot (-1) = -8x$$

$$p = 4 : \binom{4}{4} (2x)^0 (-1)^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

En sommant ces termes :

$$(2x - 1)^4 = 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1$$

Propriété**Quelques identités remarquables découlant de la formule du binôme**

— En prenant $a = 1$ et $b = 1$:

$$(1 + 1)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 1^{n-p} 1^p \implies 2^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p}$$

Cela signifie que la somme des coefficients binomiaux d'une ligne du Triangle de Pascal est égale à 2^n . C'est aussi le nombre total de sous-ensembles d'un ensemble à n éléments.

— En prenant $a = 1$ et $b = -1$:

$$(1 - 1)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 1^{n-p} (-1)^p \implies 0^n = \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{n}{p}$$

Pour $n \geq 1$, $\sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{n}{p} = 0$. Cela signifie que la somme alternée des coefficients binomiaux est nulle.

Remarque

La formule du binôme de Newton est un outil puissant non seulement pour développer des polynômes, mais aussi pour démontrer diverses identités combinatoires et en probabilités (notamment pour la loi binomiale).