

Exercices de Réflexion : Algèbre - Dénombrement

Lycée ...
Terminale Spécialité Mathématiques

Année scolaire 2024-2025

Table des matières

1 Problèmes de Dénombrement avancés	3
-------------------------------------	---

1 Problèmes de Dénombrement avancés

Ces exercices demandent souvent la combinaison de plusieurs techniques de dénombrement ou une analyse plus approfondie de la situation.

Exercice 1. Les jetons numérotés

On dispose de 10 jetons numérotés de 0 à 9.

- (a) Combien de nombres à 5 chiffres peut-on former avec ces jetons si :
 - i) Les répétitions sont autorisées et le premier chiffre ne peut pas être 0 ?
 - ii) Les répétitions sont interdites et le premier chiffre ne peut pas être 0 ?
- (b) Combien de nombres à 4 chiffres distincts peut-on former si le nombre doit être pair ?
- (c) Combien de nombres à 6 chiffres distincts peut-on former, tels que le chiffre 5 apparaisse exactement une fois ?

Exercice 2. Composition de commissions

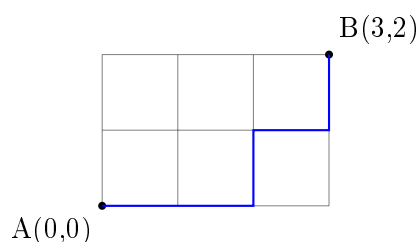
Un club de bridge est composé de 8 hommes et 7 femmes. On souhaite former une commission de 5 membres.

- (a) Combien de commissions différentes peut-on former ?
- (b) Combien de commissions sont composées d'exactly 3 hommes et 2 femmes ?
- (c) Combien de commissions contiennent au moins 3 femmes ?
- (d) Combien de commissions ne contiennent que des membres du même sexe ?

Exercice 3. Chemins sur une grille

On considère un réseau de points sur une grille, allant du point $A(0,0)$ au point $B(m,n)$. On ne peut se déplacer que d'un pas vers la droite (Est) ou d'un pas vers le haut (Nord).

- (a) De combien de manières différentes peut-on aller du point $A(0,0)$ au point $B(3,2)$? Dessinez un exemple de chemin.
- (b) Généraliser le résultat : de combien de manières différentes peut-on aller du point $A(0,0)$ au point $B(m,n)$? Justifiez votre réponse.
- (c) Si le point $C(1,1)$ est obligatoire sur le chemin pour aller de $A(0,0)$ à $B(3,2)$, combien y a-t-il de chemins possibles ?



Exercice 4. Répartition d'objets dans des boîtes

On dispose de 5 boules identiques et de 3 boîtes distinctes.

- (a) De combien de manières différentes peut-on ranger ces 5 boules dans les 3 boîtes ? (Certaines boîtes peuvent être vides).
- (b) De combien de manières différentes peut-on ranger ces 5 boules dans les 3 boîtes, sachant qu'aucune boîte ne doit être vide ?

Exercice 5. Analyse de mots

On considère un alphabet de 26 lettres.

- (a) Combien de mots de 5 lettres distinctes peut-on former ?
- (b) Combien de mots de 5 lettres, contenant exactement deux lettres identiques, peut-on former ? (Par exemple, "POMME" ou "AVION", mais pas "BANANA").

- (c) Combien de mots de 5 lettres, ne contenant que des voyelles (A, E, I, O, U, Y) ou que des consonnes, peut-on former ? (Les répétitions sont autorisées).

Exercice 6. Problème des anniversaires

Dans un groupe de N personnes, quelle est la probabilité que deux personnes au moins aient la même date d'anniversaire (jour et mois) ? On ignorera les années bissextiles et on considérera 365 jours par an.

- (a) Exprimer cette probabilité en fonction de N .
(b) Calculer cette probabilité pour $N = 23$. Interpréter le résultat. (Bien que ce soit un exercice de probabilités, le dénombrement en est la clé).

Exercice 7. Sous-ensembles d'un ensemble

Soit E un ensemble à n éléments.

- (a) Démontrer que le nombre total de sous-ensembles de E est 2^n .
(b) En déduire une propriété des coefficients binomiaux.
(c) Combien de sous-ensembles de E contiennent un nombre pair d'éléments ? Combien contiennent un nombre impair d'éléments ?

Exercice 8. Coefficients binomiaux et identités

- (a) Sans utiliser la formule du binôme, mais en utilisant une approche combinatoire, démontrer l'identité de Pascal : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ pour $0 \leq p < n$. (Indication : considérer le choix de $p+1$ personnes dans un groupe de $n+1$ personnes).
(b) Démontrer l'identité de Vandermonde : $\sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$. (Indication : considérer le choix de r personnes dans un groupe de m hommes et n femmes).