

Recueil d'exercices : Algèbre - Dénombrement

Lycée ...
Terminale Spécialité Mathématiques

Année scolaire 2024-2025

Table des matières

1	Principes fondamentaux du dénombrement	3
2	p-listes (Arrangements avec répétition)	3
3	Permutations	3
4	Arrangements sans répétition	4
5	Combinaisons	4
6	Formule du binôme de Newton	4

1 Principes fondamentaux du dénombrement

Exercice 1. Une cantine propose 2 entrées, 3 plats principaux et 4 desserts différents. Combien de menus différents peut-on composer si l'on choisit une entrée, un plat et un dessert ?

Exercice 2. Dans une association sportive, il y a 12 joueurs de football et 8 joueurs de basket. Combien de licenciés cette association compte-t-elle si un licencié ne pratique qu'un seul sport ?

Exercice 3. Pour se rendre au lycée, un élève a le choix entre 3 lignes de bus et 2 lignes de tramway. De combien de manières différentes peut-il se rendre au lycée s'il utilise un seul moyen de transport ?

Exercice 4. Un code d'accès est formé de 3 lettres (parmi les 26 de l'alphabet) suivies de 2 chiffres (de 0 à 9). Combien de codes différents peut-on former si :

- (a) Les répétitions sont autorisées pour les lettres et les chiffres ?
- (b) Les répétitions sont interdites pour les lettres et les chiffres ?

Exercice 5. Une personne possède 5 chemises, 3 pantalons et 2 paires de chaussures. Combien de tenues différentes peut-elle composer ?

2 p -listes (Arrangements avec répétition)

Exercice 6. Un cadenas à combinaison a 4 molettes, chacune affichant les chiffres de 0 à 9. Combien de combinaisons différentes ce cadenas propose-t-il ?

Exercice 7. Combien de numéros de téléphone à 10 chiffres (commençant par 06 ou 07) peut-on former ?

Exercice 8. On lance un dé à six faces équilibré trois fois de suite. Combien de suites de résultats différentes peut-on obtenir ?

- Exercice 9.** Combien de nombres à 3 chiffres peut-on former avec les chiffres $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?
- (a) Si les répétitions sont autorisées.
 - (b) Si les répétitions sont interdites. (Transition vers les arrangements sans répétition)

Exercice 10. Un QCM est composé de 8 questions, chacune ayant 4 réponses possibles (A, B, C, D). Combien de grilles de réponses différentes peut-on remplir ?

3 Permutations

Exercice 11. De combien de manières différentes peut-on ranger 5 livres distincts sur une étagère ?

Exercice 12. Dans une course, 6 athlètes s'affrontent sur une seule piste. On s'intéresse à l'ordre d'arrivée. Combien y a-t-il d'ordres d'arrivée possibles ?

Exercice 13. Calculer les valeurs suivantes : $0!$, $1!$, $4!$, $6!$.

Exercice 14. Combien d'anagrammes peut-on former avec le mot "MATHS" ?

Exercice 15. Un groupe de 7 amis pose pour une photo.

- (a) De combien de manières différentes peuvent-ils se placer sur une ligne ?
- (b) Si 3 amis doivent rester ensemble (considérés comme un bloc), de combien de manières différentes le groupe peut-il se placer ?

Exercice 16. Combien d'anagrammes distincts peut-on former avec les mots suivants :

- (a) "ELLE"
- (b) "STATISTIQUE"
- (c) "MISSISSIPPI"

4 Arrangements sans répétition

Exercice 17. Un comité de 10 personnes doit élire un président, un vice-président et un secrétaire. Combien y a-t-il de façons d'attribuer ces trois postes ?

Exercice 18. On tire au sort 3 boules successivement et sans remise d'une urne contenant 15 boules numérotées de 1 à 15. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?

Exercice 19. Calculer les valeurs suivantes : A_5^2 , A_7^3 , A_4^4 .

Exercice 20. Un hippodrome organise une course avec 8 chevaux. On parie sur l'ordre d'arrivée des 3 premiers chevaux. Combien de "tiercés dans l'ordre" sont possibles ?

Exercice 21. Une entreprise doit affecter 4 de ses 12 ingénieurs à 4 projets distincts, un ingénieur par projet. Combien de manières différentes peut-elle faire ces affectations ?

5 Combinaisons

Exercice 22. Dans une classe de 30 élèves, on veut élire un comité de 4 élèves. Combien de comités différents peut-on former ?

Exercice 23. Un jeu de 32 cartes. On tire simultanément 5 cartes. Combien de mains différentes peut-on obtenir ?

Exercice 24. Calculer les valeurs suivantes : $\binom{6}{2}$, $\binom{7}{0}$, $\binom{5}{5}$, $\binom{10}{3}$.

Exercice 25. Une urne contient 7 boules rouges et 5 boules bleues. On tire simultanément 3 boules.

- (a) Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
- (b) Combien de tirages contiennent 2 boules rouges et 1 boule bleue ?
- (c) Combien de tirages contiennent au moins une boule rouge ?

Exercice 26. Un sac contient des jetons de différentes couleurs : 4 verts, 6 rouges, 3 bleus. On tire 3 jetons simultanément.

- (a) Combien de tirages contiennent 3 jetons de la même couleur ?
- (b) Combien de tirages contiennent 2 jetons verts et 1 jeton rouge ?

Exercice 27. Démontrer l'identité $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ en utilisant la formule de calcul des coefficients binomiaux.

Exercice 28. Sans calcul, justifier pourquoi $\binom{9}{4} = \binom{9}{5}$.

6 Formule du binôme de Newton

Exercice 29. En utilisant le Triangle de Pascal, donner les coefficients de $(a + b)^4$.

Exercice 30. Développer les expressions suivantes en utilisant la formule du binôme de Newton :

- (a) $(x + 2)^3$
- (b) $(y - 1)^4$
- (c) $(2a + 3b)^2$
- (d) $(x - \sqrt{2})^3$

Exercice 31. Quel est le coefficient du terme en x^3y^5 dans le développement de $(x + y)^8$?

Exercice 32. Quel est le coefficient du terme en a^2b^4 dans le développement de $(a + 2b)^6$?

Exercice 33. Démontrer en utilisant la formule du binôme de Newton que pour tout entier $n \geq 0$:

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$$

Exercice 34. Démontrer en utilisant la formule du binôme de Newton que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{n}{p} = 0$$