

Phénomènes Aléatoires : Probabilités Conditionnelles

Exomaths.fr

Juin 2025

Contents

1	Introduction aux probabilités conditionnelles	2
2	Probabilité conditionnelle	2
2.1	Définition et notation	2
2.2	Formule des probabilités composées	3
3	Arbres pondérés	4
4	Formule des probabilités totales	5
5	Indépendance de deux événements	7

1 Introduction aux probabilités conditionnelles

Dans de nombreuses situations, la connaissance d'un événement peut modifier la probabilité d'un autre événement. Les probabilités conditionnelles permettent de prendre en compte cette information supplémentaire. Elles sont fondamentales pour l'analyse de situations complexes où les événements ne sont pas indépendants.

Remarque 1.1. Les probabilités conditionnelles sont utilisées dans de nombreux domaines : médecine (tests de dépistage), assurance, finance, fiabilité industrielle, intelligence artificielle, etc. Elles permettent de réévaluer des probabilités à la lumière de nouvelles informations.

2 Probabilité conditionnelle

2.1 Définition et notation

Considérons une expérience aléatoire et Ω l'univers des issues. Soient A et B deux événements de cette expérience.

Définition

Soient A et B deux événements associés à une expérience aléatoire, avec $P(A) \neq 0$. La **probabilité de B sachant A** (ou probabilité de B conditionnée par A) est notée $P(B|A)$ et est définie par :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

où $P(A \cap B)$ est la probabilité de l'événement " A et B " (c'est-à-dire que A et B se réalisent simultanément).

Remarque 2.1. La notation $P_A(B)$ est parfois utilisée au lieu de $P(B|A)$. Il est crucial que l'événement A dont on sait qu'il s'est produit ait une probabilité non nulle, sinon la division par $P(A)$ n'aurait pas de sens.

Point de méthode

Calculer une probabilité conditionnelle

1. Identifiez clairement les deux événements A et B .
2. Déterminez quel événement est la condition (l'événement dont on sait qu'il s'est réalisé), ce sera l'événement A dans $P(B|A)$.
3. Calculez la probabilité de l'intersection des deux événements, $P(A \cap B)$.
4. Calculez la probabilité de l'événement conditionnant, $P(A)$.
5. Appliquez la formule $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Exemple 2.1 (Dés et probabilités conditionnelles). On lance un dé équilibré à six faces. Soit A l'événement "obtenir un nombre pair". Soit B l'événement "obtenir un nombre supérieur ou égal à 4".

Étape 1 et 2 : Identifier les événements. $A = \{2, 4, 6\}$ $B = \{4, 5, 6\}$ Nous voulons calculer $P(B|A)$, c'est-à-dire la probabilité d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 4 sachant que le nombre est pair.

Étape 3 : Calculer $P(A \cap B)$. L'événement $A \cap B$ est "obtenir un nombre pair ET supérieur ou égal à 4". $A \cap B = \{4, 6\}$ L'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a 6 issues équiprobables. $P(A \cap B) = \frac{\text{Nombre d'issues de } (A \cap B)}{\text{Nombre total d'issues}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Étape 4 : Calculer $P(A)$. $P(A) = \frac{\text{Nombre d'issues de } A}{\text{Nombre total d'issues}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Étape 5 : Appliquer la formule. $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{1} = \frac{2}{3}$.

Interprétation : Sachant que le dé a donné un nombre pair (donc 2, 4 ou 6), la probabilité que ce nombre soit supérieur ou égal à 4 est de $\frac{2}{3}$. Cela est logique car sur les trois issues paires (2, 4, 6), deux sont supérieures ou égales à 4 (4 et 6).

2.2 Formule des probabilités composées

De la définition de la probabilité conditionnelle, on peut déduire une formule utile pour calculer la probabilité d'une intersection.

Propriété

Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$. Alors :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

De même, si $P(B) \neq 0$, on a :

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$$

Point de méthode

Utiliser la formule des probabilités composées

1. Identifiez les événements A et B dont vous voulez calculer l'intersection.
2. Si l'un des événements (A ou B) se produit "en premier" ou est une condition naturelle, utilisez la formule correspondante. Par exemple, si A est la première étape d'un processus et B la seconde, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$.
3. Calculez les probabilités $P(A)$ (ou $P(B)$) et $P(B|A)$ (ou $P(A|B)$).
4. Multipliez les valeurs pour obtenir $P(A \cap B)$.

Exemple 2.2 (Tirage de boules sans remise). Une urne contient 5 boules rouges (R) et 3 boules bleues (B). On tire successivement et sans remise deux boules. Soit A l'événement "la première boule tirée est rouge". Soit B l'événement "la deuxième boule tirée est rouge". Calculons $P(A \cap B)$, la probabilité que les deux boules tirées soient rouges.

Étape 1 et 2 : Identifier les événements et la structure séquentielle. Nous voulons $P(A \cap B)$. L'événement A se produit en premier, et B est conditionné par A . Nous allons utiliser $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$.

Étape 3 : Calculez $P(A)$. Au premier tirage, il y a 5 boules rouges sur un total de 8 boules. $P(A) = \frac{5}{8}$.

Étape 4 : Calculez $P(B|A)$. Sachant que la première boule tirée est rouge (événement A réalisé), il reste 4 boules rouges et 3 boules bleues dans l'urne, soit un total de 7 boules. La probabilité que la deuxième boule soit rouge, sachant que la première était rouge, est donc : $P(B|A) = \frac{4}{7}$.

Étape 5 : Multipliez les probabilités. $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$.

Interprétation : La probabilité de tirer deux boules rouges successivement sans remise est $\frac{5}{14}$.

3 Arbres pondérés

Les arbres pondérés sont un outil graphique très efficace pour représenter les situations de probabilités conditionnelles et les enchaînements d'événements.

Point de méthode

Construire et utiliser un arbre pondéré

1. **Branches du premier niveau :** Représentez les issues du premier événement avec leurs probabilités respectives. La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud doit être égale à 1.
2. **Branches du second niveau (et suivants) :** À partir de chaque issue du premier événement, tracez des branches pour les issues du deuxième événement. Ces branches sont pondérées par des probabilités conditionnelles. Par exemple, si la première branche est A , les branches suivantes seront pondérées par $P(B|A)$ et $P(\bar{B}|A)$.
3. **Chemins et intersections :** Chaque chemin de la racine jusqu'à une feuille de l'arbre représente une intersection d'événements (par exemple, $A \cap B$). La probabilité d'un chemin s'obtient en multipliant les probabilités rencontrées le long de ce chemin (formule des probabilités composées).
4. **Calcul de probabilités totales :** Pour calculer la probabilité d'un événement qui peut être atteint par plusieurs chemins (par exemple, $P(B)$), additionnez les probabilités des chemins qui mènent à cet événement.

Exemple 3.1 (Tests de dépistage). Une maladie touche 2% de la population. Un test de dépistage est mis au point.

- Si une personne est malade, le test est positif dans 95% des cas (le test est fiable).
- Si une personne n'est pas malade, le test est positif dans 1% des cas (faux positif).

On choisit une personne au hasard dans la population. Soit M l'événement "la personne est malade". Soit T l'événement "le test est positif".

Étape 1 : Branches du premier niveau (M ou $\bar{M}$). $P(M) = 0,02$ $P(\bar{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0,02 = 0,98$.

Étape 2 : Branches du second niveau (probabilités conditionnelles).

- Sachant que la personne est malade (M), la probabilité que le test soit positif est $P(T|M) = 0,95$.
- Sachant que la personne est malade (M), la probabilité que le test soit négatif est $P(\bar{T}|M) = 1 - P(T|M) = 1 - 0,95 = 0,05$.
- Sachant que la personne n'est pas malade ($\bar{M}$), la probabilité que le test soit positif est $P(T|\bar{M}) = 0,01$.
- Sachant que la personne n'est pas malade ($\bar{M}$), la probabilité que le test soit négatif est $P(\bar{T}|\bar{M}) = 1 - P(T|\bar{M}) = 1 - 0,01 = 0,99$.

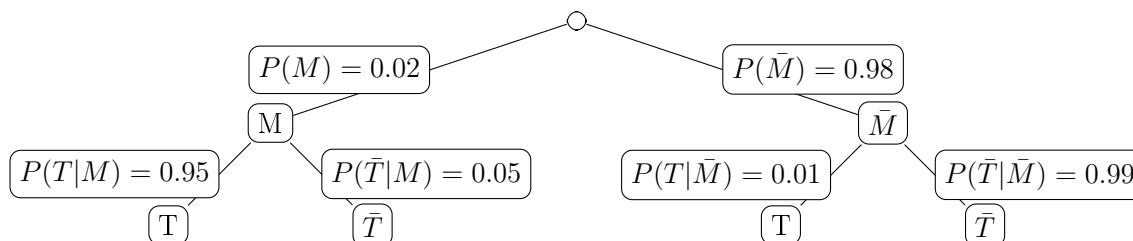
Étape 3 : Construction de l'arbre et calcul des probabilités des chemins.

$$P(M \cap T) = 0.02 \times 0.95 = 0.019$$

$$P(M \cap \bar{T}) = 0.02 \times 0.05 = 0.001$$

$$P(\bar{M} \cap T) = 0.98 \times 0.01 = 0.0098$$

$$P(\bar{M} \cap \bar{T}) = 0.98 \times 0.99 = 0.9702$$



Étape 4 : Calculer la probabilité que le test soit positif ($P(T)$). L'événement T (test positif) correspond à deux chemins dans l'arbre :

- La personne est malade ET le test est positif ($M \cap T$).
- La personne n'est pas malade ET le test est positif ($\bar{M} \cap T$).

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) \quad P(T) = (0,02 \times 0,95) + (0,98 \times 0,01) \quad P(T) = 0,019 + 0,0098 = 0,0288.$$

Interprétation : La probabilité qu'une personne choisie au hasard ait un test positif est de 2,88%.

4 Formule des probabilités totales

La formule des probabilités totales est un résultat fondamental qui permet de calculer la probabilité d'un événement en le décomposant selon les différentes modalités d'un autre événement. Elle est souvent utilisée en conjonction avec les arbres pondérés.

Définition

Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ un **système complet d'événements**. Cela signifie que :

- les événements A_i sont deux à deux incompatibles (c'est-à-dire $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$) ;
- l'union de tous les A_i est égale à l'univers Ω (c'est-à-dire $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$) ;
- tous les $P(A_i) \neq 0$.

Alors, pour tout événement B , la **formule des probabilités totales** s'écrit :

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \dots + P(B|A_n)P(A_n)$$

Ce qui peut se réécrire :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$$

Remarque 4.1. Le cas le plus courant d'un système complet d'événements est $\{A, \bar{A}\}$, où $\bar{A}$ est l'événement contraire de A . Dans ce cas, la formule des probabilités totales devient :

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$$

C'est précisément ce que nous avons appliqué dans l'exemple de l'arbre pondéré pour calculer $P(T)$.

Point de méthode

Appliquer la formule des probabilités totales

1. Identifiez l'événement B dont vous souhaitez calculer la probabilité.
2. Définissez un système complet d'événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ qui partitionne l'univers et est pertinent pour la situation (souvent les issues d'une première étape de l'expérience).
3. Déterminez les probabilités $P(A_i)$ pour chaque événement du système complet.
4. Déterminez les probabilités conditionnelles $P(B|A_i)$ pour chaque A_i .
5. Appliquez la formule en sommant les produits $P(B|A_i)P(A_i)$.

Exemple 4.1 (Production de pièces). Une usine fabrique des pièces à l'aide de trois machines : M1, M2 et M3.

- La machine M1 produit 30% des pièces, M2 en produit 45%, et M3 en produit 25%.
- La proportion de pièces défectueuses est de 2% pour M1, 3% pour M2 et 1% pour M3.

On tire une pièce au hasard dans la production totale. Quelle est la probabilité que cette pièce soit défectueuse ?

Étape 1 : Identifier l'événement B . Soit D l'événement "la pièce est défectueuse".

Étape 2 : Définir un système complet d'événements. Les événements M_1, M_2, M_3 (la pièce provient de la machine M1, M2, M3 respectivement) forment un système complet d'événements :

- Ils sont incompatibles (une pièce ne peut provenir que d'une seule machine).
- Leur union couvre tout l'univers (toutes les pièces proviennent d'une de ces trois machines).

Étape 3 : Déterminer les $P(A_i)$. $P(M_1) = 0,30$ $P(M_2) = 0,45$ $P(M_3) = 0,25$ (Vérification : $0,30 + 0,45 + 0,25 = 1$)

Étape 4 : Déterminer les $P(D|A_i)$. $P(D|M_1) = 0,02$ (probabilité d'être défectueuse sachant qu'elle vient de M1) $P(D|M_2) = 0,03$ (probabilité d'être défectueuse sachant qu'elle vient de M2) $P(D|M_3) = 0,01$ (probabilité d'être défectueuse sachant qu'elle vient de M3)

Étape 5 : Appliquer la formule des probabilités totales. $P(D) = P(D|M_1)P(M_1) + P(D|M_2)P(M_2) + P(D|M_3)P(M_3)$ $P(D) = (0,02 \times 0,30) + (0,03 \times 0,45) + (0,01 \times 0,25)$ $P(D) = 0,006 + 0,0135 + 0,0025$ $P(D) = 0,022$.

Interprétation : La probabilité qu'une pièce tirée au hasard soit défectueuse est de 0,022, soit 2,2%.

5 Indépendance de deux événements

La notion d'indépendance est cruciale en probabilités. Intuitivement, deux événements sont indépendants si la réalisation de l'un n'affecte pas la probabilité de réalisation de l'autre.

Définition

Deux événements A et B sont dits **indépendants** si la réalisation de l'un n'influence pas la probabilité de réalisation de l'autre. Mathématiquement, cela se traduit par l'une des conditions équivalentes suivantes (pourvu que les probabilités ne soient pas nulles) :

- $P(A|B) = P(A)$ (la probabilité de A sachant B est égale à la probabilité de A)
- $P(B|A) = P(B)$ (la probabilité de B sachant A est égale à la probabilité de B)
- $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ (la probabilité de l'intersection est le produit des probabilités individuelles)

Remarque 5.1. Si $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$, alors A et B sont toujours indépendants. En effet, $P(A \cap B)$ serait 0, et $P(A) \times P(B)$ serait également 0. Ne pas confondre "événements incompatibles" et "événements indépendants" :

- **Incompatibles** ($A \cap B = \emptyset$): Ils ne peuvent pas se produire en même temps. Si A se produit, alors B ne peut pas se produire. Donc $P(B|A) = 0$. Sauf cas particuliers ($P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$), des événements incompatibles ne sont jamais indépendants.
- **Indépendants**: La réalisation de l'un n'empêche ni ne favorise la réalisation de l'autre.

Propriété

Si A et B sont deux événements indépendants, alors les paires d'événements suivantes sont également indépendantes :

- A et $\bar{B}$
- $\bar{A}$ et B
- $\bar{A}$ et $\bar{B}$

Point de méthode

Vérifier l'indépendance de deux événements

1. Calculez $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$.
2. Comparez $P(A \cap B)$ avec le produit $P(A) \times P(B)$.
3. Si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, alors les événements sont indépendants. Sinon, ils ne le sont pas.
4. Alternativement, si $P(A) \neq 0$, calculez $P(B|A)$ et comparez-le à $P(B)$. S'ils sont égaux, les événements sont indépendants.

Exemple 5.1 (Lancer de pièces). On lance deux fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. Soit A l'événement "obtenir Pile au premier lancer". Soit B l'événement "obtenir Face au deuxième lancer".

Étape 1 : Calculer les probabilités. L'univers des issues est $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$. Les issues sont équiprobables. $P(A) = P(\{PP, PF\}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. $P(B) = P(\{PF, FF\}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. L'événement $A \cap B$ est "obtenir Pile au premier lancer ET Face au deuxième lancer", soit $A \cap B = \{PF\}$. $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.

Étape 2 : Comparer $P(A \cap B)$ et $P(A) \times P(B)$. $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. On constate que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Conclusion : Les événements A et B sont indépendants. Il est intuitif que le résultat du premier lancer n'influence pas celui du second.

Exemple 5.2 (Tirage de cartes avec remise). Un jeu de 32 cartes contient 4 as. On tire une carte, on la note, et on la remet dans le jeu. On tire ensuite une seconde carte. Soit A l'événement "la première carte tirée est un as". Soit B l'événement "la deuxième carte tirée est un as".

Étape 1 : Calculer les probabilités. $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$. Comme le tirage est avec remise, le fait que la première carte soit un as ne change pas la composition du jeu pour le second tirage. Donc : $P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$. L'événement $A \cap B$ est "la première carte est un as ET la deuxième carte est un as". Puisque les tirages sont indépendants (grâce à la remise), on peut directement utiliser la propriété : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$.

Conclusion : Les événements A et B sont indépendants grâce à la remise de la carte.

Remarque 5.2. L'indépendance est une propriété mathématique qui doit être démontrée par le calcul ou justifiée par la nature de l'expérience (ex: tirages avec remise, événements sans lien de causalité). Ne pas la supposer sans vérification.