

Croissance Linéaire : Suites Arithmétiques et Fonctions Affines

Exomaths.fr

Juin 2025

Contents

1	Introduction à la croissance linéaire	2
2	Suites Arithmétiques : Modélisation Discrète de la Croissance Linéaire	2
2.1	Définitions et Vocabulaire	2
2.2	Propriétés Fondamentales	3
3	Fonctions Affines : Modélisation Continue de la Croissance Linéaire	4
3.1	Définitions et Vocabulaire	5
3.2	Propriétés Fondamentales	5
4	Lien entre Suites Arithmétiques et Fonctions Affines	7
5	Modélisation de situations de croissance linéaire	7
6	Résolution de problèmes de seuil	8

1 Introduction à la croissance linéaire

La croissance linéaire est un type d'évolution où une grandeur augmente (ou diminue) de manière constante à chaque pas ou à chaque unité de temps. C'est une notion fondamentale en mathématiques, présente dans de nombreux phénomènes du quotidien.

En mathématiques, la croissance linéaire est modélisée principalement par deux outils :

- Les **suites arithmétiques** pour les phénomènes discrets, où l'évolution se fait par "sauts" réguliers (par exemple, chaque année, chaque mois, à chaque unité entière).
- Les **fonctions affines** pour les phénomènes continus, où l'évolution est graduelle et se représente par une droite.

Ce chapitre explorera ces deux concepts, leurs propriétés, leur lien étroit, et comment les utiliser pour modéliser et résoudre des problèmes concrets.

2 Suites Arithmétiques : Modélisation Discrète de la Croissance Linéaire

Les suites arithmétiques sont utilisées pour décrire des phénomènes qui évoluent par ajout (ou soustraction) d'une quantité fixe à chaque étape.

2.1 Définitions et Vocabulaire

Définition

Une suite de nombres (u_n) est une **suite arithmétique** si, pour passer d'un terme au suivant, on ajoute toujours le même nombre. Ce nombre est appelé la **raison** de la suite et est noté r . Pour tout entier naturel n , on a donc la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Remarque 2.1. Le premier terme d'une suite est souvent noté u_0 ou u_1 .

- Si la suite commence à u_0 , ses termes sont $u_0, u_1, u_2, \dots$
- Si la suite commence à u_1 , ses termes sont $u_1, u_2, u_3, \dots$

Il est important de bien identifier le premier terme et l'indice de départ de la suite dans un problème donné.

2.2 Propriétés Fondamentales

Propriété

Formule explicite du terme de rang n

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r :

- Si le premier terme est u_0 , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 + n \times r$$

- Si le premier terme est u_1 , alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = u_1 + (n - 1) \times r$$

Plus généralement, pour tous entiers naturels n et p :

$$u_n = u_p + (n - p) \times r$$

Propriété

Sens de variation

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

- Si $r > 0$, la suite (u_n) est **strictement croissante**.
- If $r < 0$, la suite (u_n) est **strictement décroissante**.
- If $r = 0$, la suite (u_n) est **constante**.

Point de méthode

Démontrer qu'une suite est arithmétique Pour montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, on doit calculer la différence $u_{n+1} - u_n$ et montrer que cette différence est constante (ne dépend pas de n). Cette constante est la raison r .

Point de méthode

Calculer un terme de rang donné

1. Identifiez le premier terme (u_0 ou u_1) et la raison r .
2. Utilisez la formule explicite $u_n = u_0 + nr$ (ou $u_n = u_1 + (n - 1)r$) en remplaçant n par le rang souhaité.

Exemple 2.1 (Calcul de termes). Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 3$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 .
2. Calculer u_{10} .
3. Calculer u_{100} .

Solution commentée :

1. Pour calculer les premiers termes, on utilise la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + r$.
 $u_0 = 5$ $u_1 = u_0 + r = 5 + 3 = 8$ $u_2 = u_1 + r = 8 + 3 = 11$ $u_3 = u_2 + r = 11 + 3 = 14$
2. Pour calculer u_{10} , on utilise la formule explicite $u_n = u_0 + n \times r$. Ici $n = 10$, $u_0 = 5$ et $r = 3$. $u_{10} = 5 + 10 \times 3 = 5 + 30 = 35$.
3. Pour calculer u_{100} , on utilise la même formule. $u_{100} = 5 + 100 \times 3 = 5 + 300 = 305$.

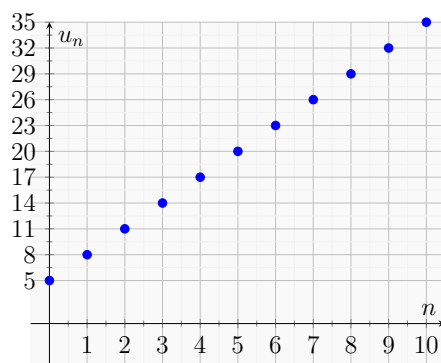
Exemple 2.2 (Modélisation de croissance de population). Une ville compte 50 000 habitants en 2020. Chaque année, la population augmente de 500 habitants. On note P_n la population en l'année 2020 + n .

1. Déterminez la nature de la suite (P_n) et ses caractéristiques.
2. Exprimez P_n en fonction de n .
3. Quelle sera la population en 2030 ?

Solution commentée :

1. La population augmente de 500 habitants **chaque année**. Cela signifie qu'on ajoute une quantité fixe à la population de l'année précédente. La suite (P_n) est donc une **suite arithmétique**. Son premier terme est $P_0 = 50\,000$ (population en 2020, année 2020 + 0). Sa raison est $r = 500$ (l'augmentation annuelle).
2. La formule explicite pour une suite arithmétique de premier terme P_0 est $P_n = P_0 + n \times r$. Donc, $P_n = 50\,000 + 500n$.
3. L'année 2030 correspond à $n = 2030 - 2020 = 10$. On doit calculer P_{10} . $P_{10} = 50\,000 + 500 \times 10 = 50\,000 + 5\,000 = 55\,000$. La population de la ville en 2030 sera de 55 000 habitants.

Remarque 2.2. Représentation graphique d'une suite arithmétique Les termes d'une suite arithmétique, lorsqu'ils sont représentés dans un repère (en plaçant n en abscisse et u_n en ordonnée), sont des points alignés. C'est le reflet de la croissance linéaire. Cependant, les points ne sont pas connectés car n est un entier naturel (discret).



3 Fonctions Affines : Modélisation Continue de la Croissance Linéaire

Les fonctions affines sont les fonctions dont la représentation graphique est une droite. Elles modélisent des phénomènes qui évoluent de manière continue, avec un taux de changement constant.

3.1 Définitions et Vocabulaire

Définition

Une **fonction affine** est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = ax + b$$

où a et b sont des nombres réels fixés.

- Le nombre a est appelé le **coefficient directeur** ou le **taux d'accroissement** de la fonction. Il indique la "pente" de la droite représentative.
- Le nombre b est appelé l'**ordonnée à l'origine**. C'est la valeur de $f(x)$ lorsque $x = 0$, et c'est l'ordonnée du point où la droite coupe l'axe des ordonnées.

Remarque 3.1. • Si $b = 0$, la fonction s'écrit $f(x) = ax$. C'est une **fonction linéaire**. Sa représentation graphique est une droite passant par l'origine du repère $(0, 0)$.

- Si $a = 0$, la fonction s'écrit $f(x) = b$. C'est une **fonction constante**. Sa représentation graphique est une droite horizontale.

3.2 Propriétés Fondamentales

Propriété

Représentation graphique

La représentation graphique d'une fonction affine $f(x) = ax + b$ est une **droite** dans un repère.

Propriété

Sens de variation

Soit $f(x) = ax + b$ une fonction affine.

- Si $a > 0$, la fonction f est **strictement croissante**.
- If $a < 0$, la fonction f est **strictement décroissante**.
- If $a = 0$, la fonction f est **constante**.

Propriété

Calcul du coefficient directeur

Pour une fonction affine $f(x) = ax + b$, si $x_1 \neq x_2$, le coefficient directeur a peut être calculé par la formule :

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Point de méthode

Déterminer l'expression d'une fonction affine

1. À partir de deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) :

- Calculez le coefficient directeur $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
- Utilisez l'un des points dans l'équation $y = ax + b$ pour trouver b . Par exemple, $y_1 = ax_1 + b \implies b = y_1 - ax_1$.

2. À partir du graphique :

- L'ordonnée à l'origine b est la valeur de y lorsque la droite coupe l'axe des ordonnées ($x = 0$).
- Pour le coefficient directeur a , choisissez deux points "lisibles" sur la droite (x_1, y_1) et (x_2, y_2) et calculez $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. (On peut aussi partir d'un point et se déplacer de 1 unité vers la droite, la variation verticale est a).

Point de méthode

Représenter graphiquement une fonction affine

Pour tracer la droite représentant $f(x) = ax + b$:

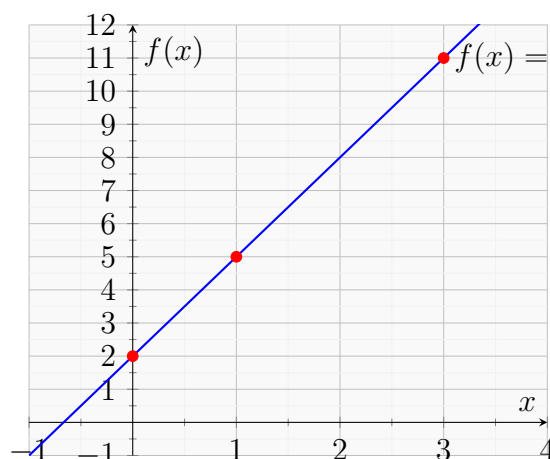
1. Placez le point correspondant à l'ordonnée à l'origine : $(0, b)$.
2. Choisissez une autre valeur de x (par exemple $x = 1$ ou $x = 2$), calculez $f(x)$ et placez le deuxième point $(x, f(x))$.
3. Tracez la droite passant par ces deux points.

Exemple 3.1 (Détermination et représentation graphique). Soit la fonction affine f telle que $f(1) = 5$ et $f(3) = 11$.

1. Déterminez l'expression de $f(x)$.
2. Représentez graphiquement cette fonction.

Solution commentée :

1. $f(x) = ax + b$. Calcul du coefficient directeur a : $a = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{11 - 5}{2} = \frac{6}{2} = 3$. La fonction s'écrit $f(x) = 3x + b$. Pour trouver b , on utilise un des points, par exemple $f(1) = 5$: $5 = 3 \times 1 + b \implies 5 = 3 + b \implies b = 2$. L'expression de la fonction affine est donc $f(x) = 3x + 2$.
2. Pour représenter graphiquement $f(x) = 3x + 2$: Premier point : l'ordonnée à l'origine est $b = 2$. Le point est $(0, 2)$. Deuxième point : Choisissons $x = 1$, $f(1) = 3(1) + 2 = 5$. Le point est $(1, 5)$. On peut aussi utiliser $f(3) = 11$, le point est $(3, 11)$. Traçons la droite passant par $(0, 2)$ et $(1, 5)$ (ou $(3, 11)$).



4 Lien entre Suites Arithmétiques et Fonctions Affines

Les suites arithmétiques et les fonctions affines sont deux concepts étroitement liés. Une suite arithmétique peut être vue comme une fonction affine dont le domaine est restreint aux entiers naturels.

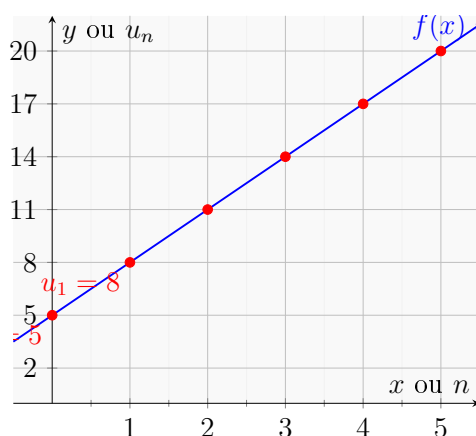
Propriété

Les termes d'une suite arithmétique (u_n) de premier terme u_0 et de raison r sont les images des nombres entiers n par la fonction affine $f(x) = rx + u_0$. Autrement dit, $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 4.1. La raison r de la suite arithmétique correspond au coefficient directeur a de la fonction affine. Le premier terme u_0 de la suite arithmétique correspond à l'ordonnée à l'origine b de la fonction affine.

Exemple 4.1 (Représentation conjointe). Reprenons la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 3$. Sa formule explicite est $u_n = 5 + 3n$. La fonction affine associée est $f(x) = 3x + 5$.

Graphiquement, les points de la suite $(0, u_0), (1, u_1), (2, u_2), \dots$ sont des points de la droite d'équation $y = 3x + 5$.



5 Modélisation de situations de croissance linéaire

Choisir entre une suite arithmétique et une fonction affine pour modéliser une croissance linéaire dépend de la nature du phénomène étudié : discret ou continu.

Point de méthode

Modéliser un phénomène de croissance linéaire

- Si le phénomène évolue par étapes fixes, à des intervalles réguliers (années, mois, nombre de répétitions), utilisez une **suite arithmétique**.
 - Identifiez le premier terme (u_0 ou u_1).
 - Identifiez la raison r (l'augmentation/diminution constante par étape).
- Si le phénomène évolue de manière continue sur un intervalle (distance parcourue en fonction du temps, coût en fonction du poids), utilisez une **fonction affine**.
 - Identifiez le coefficient directeur a (le taux de variation constant).
 - Identifiez l'ordonnée à l'origine b (la valeur initiale ou le coût fixe).

Exemple 5.1 (Coût d'un service de livraison). Une entreprise de livraison facture un service de la manière suivante : un coût fixe de 5 € plus 0,50 € par kilomètre parcouru. Modélisez le coût total $C(d)$ en fonction de la distance d (en km).

Solution commentée : Le coût dépend de la distance qui est une grandeur continue (on peut parcourir 1,5 km, 2,7 km, etc.). Il s'agit donc d'une modélisation par une fonction affine. Le coût fixe de 5 € est l'ordonnée à l'origine b . Le coût de 0,50 € par kilomètre est le taux de variation, c'est le coefficient directeur a . Ainsi, la fonction affine qui modélise le coût total est $C(d) = 0,50d + 5$.

Exemple 5.2 (Remboursement de dette). Une personne doit rembourser 1200 €. Chaque mois, elle rembourse 150 €. Modélisez le montant restant à rembourser en fonction du nombre de mois.

Solution commentée : Le remboursement se fait chaque mois, par étapes régulières. Il s'agit donc d'une modélisation par une suite arithmétique. Soit R_n le montant restant à rembourser après n mois. Le premier terme peut être $R_0 = 1200$ (montant initial). Chaque mois, le montant diminue de 150 €, donc la raison est $r = -150$. La suite est arithmétique de premier terme $R_0 = 1200$ et de raison $r = -150$. La formule explicite est $R_n = 1200 - 150n$.

6 Résolution de problèmes de seuil

Un problème de seuil consiste à déterminer à partir de quand une valeur (terme d'une suite ou image d'une fonction) dépasse ou atteint un certain seuil.

Point de méthode

Résoudre un problème de seuil pour une croissance linéaire

- Avec une suite arithmétique :

1. Écrivez l'inéquation $u_n > S$ (ou $u_n \geq S$, $u_n < S$, etc.), où S est le seuil.
2. Remplacez u_n par son expression explicite ($u_0 + nr$).
3. Résolvez l'inéquation pour trouver n .
4. Puisque n doit être un entier, prenez la plus petite (ou plus grande) valeur entière qui satisfait l'inéquation.

- Avec une fonction affine :

1. Écrivez l'inéquation $f(x) > S$ (ou $f(x) \geq S$, $f(x) < S$, etc.), où S est le seuil.
2. Remplacez $f(x)$ par son expression ($ax + b$).
3. Résolvez l'inéquation pour trouver x .
4. L'ensemble des solutions est un intervalle.

Exemple 6.1 (Seuil de population). Reprenons la ville qui compte 50 000 habitants en 2020 et dont la population augmente de 500 habitants chaque année ($P_n = 50\,000 + 500n$). À partir de quelle année la population dépassera-t-elle 60 000 habitants ?

Solution commentée : On cherche la plus petite valeur de n telle que $P_n > 60\,000$.
 $50\,000 + 500n > 60\,000$ $500n > 60\,000 - 50\,000$ $500n > 10\,000$ $n > \frac{10\,000}{500}$ $n > 20$

Puisque n doit être un entier (nombre d'années), la plus petite valeur entière de n qui satisfait $n > 20$ est $n = 21$. L'année 2020 + n sera 2020 + 21 = 2041. La population dépassera 60 000 habitants à partir de l'année 2041.

Exemple 6.2 (Distance parcourue et seuil). Un marcheur part d'un point A. Sa distance $D(t)$ (en km) par rapport au point A après t heures est donnée par la fonction $D(t) = 4t$. Combien de temps doit-il marcher pour dépasser 15 km ?

Solution commentée : On cherche la valeur de t telle que $D(t) > 15$. $4t > 15$ $t > \frac{15}{4}$
 $t > 3,75$

Le marcheur devra marcher plus de 3,75 heures pour dépasser 15 km. S'il s'agit d'un problème avec des étapes horaires complètes, il devrait marcher 4 heures. S'il s'agit d'une durée continue, toute durée supérieure à 3,75 heures convient.