

Croissance Exponentielle : Suites Géométriques et Fonctions Exponentielles

Exomaths.fr

Juin 2025

Contents

1	Introduction à la croissance exponentielle	2
2	Suites Géométriques : Modélisation Discrète de la Croissance Exponentielle	2
2.1	Définitions et Vocabulaire	2
2.2	Propriétés Fondamentales	3
3	Fonctions Exponentielles : Modélisation Continue de la Croissance Exponentielle	5
3.1	Définitions et Vocabulaire	5
3.2	Propriétés Fondamentales	6
4	Lien entre Suites Géométriques et Fonctions Exponentielles	7
5	Modélisation de situations de croissance exponentielle	8
6	Résolution de problèmes de seuil (avec les logarithmes)	9

1 Introduction à la croissance exponentielle

La croissance exponentielle est un type d'évolution où une grandeur augmente (ou diminue) non pas par ajout d'une quantité fixe (comme pour la croissance linéaire), mais par **multiplication par un facteur constant** à chaque pas ou à chaque unité de temps. On parle souvent de pourcentage d'augmentation ou de diminution constant.

Cette croissance est caractérisée par une accélération (ou un ralentissement) de l'évolution : plus la grandeur est grande, plus l'augmentation est importante.

Elle modélise de nombreux phénomènes dans des domaines variés :

- **Biologie** : Croissance de populations bactériennes, propagation de virus.
- **Finance** : Intérêts composés, inflation.
- **Physique** : Désintégration radioactive, croissance de l'intensité sonore.

Comme pour la croissance linéaire, nous utiliserons deux outils principaux :

- Les **suites géométriques** pour les phénomènes discrets, où l'évolution se fait par multiplication à chaque étape entière.
- Les **fonctions exponentielles** pour les phénomènes continus, offrant un prolongement des suites géométriques à des valeurs non entières.

2 Suites Géométriques : Modélisation Discrète de la Croissance Exponentielle

Les suites géométriques sont utilisées pour décrire des phénomènes qui évoluent par multiplication par un facteur constant à chaque étape.

2.1 Définitions et Vocabulaire

Définition

Une suite de nombres (u_n) est une **suite géométrique** si, pour passer d'un terme au suivant, on multiplie toujours par le même nombre non nul. Ce nombre est appelé la **raison** de la suite et est noté q . Pour tout entier naturel n , on a donc la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

Remarque 2.1. Le premier terme d'une suite est souvent noté u_0 ou u_1 .

- Si la suite commence à u_0 , ses termes sont $u_0, u_1, u_2, \dots$
- Si la suite commence à u_1 , ses termes sont $u_1, u_2, u_3, \dots$

2.2 Propriétés Fondamentales

Propriété

Formule explicite du terme de rang n

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q :

- Si le premier terme est u_0 , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 \times q^n$$

- Si le premier terme est u_1 , alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

Plus généralement, pour tous entiers naturels n et p :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Propriété

Sens de variation (pour $u_0 > 0$)

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 > 0$ et de raison q .

- Si $q > 1$, la suite (u_n) est **strictement croissante**.
- Si $0 < q < 1$, la suite (u_n) est **strictement décroissante**.
- Si $q = 1$, la suite (u_n) est **constante**.
- Si $q < 0$, la suite (u_n) est **alternée** (les signes des termes alternent).

Cas $u_0 < 0$: Les variations sont inversées par rapport au cas $u_0 > 0$. Par exemple, si $u_0 < 0$ et $q > 1$, la suite est strictement décroissante.

Propriété

Somme des premiers termes d'une suite géométrique

La somme des N premiers termes d'une suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison $q \neq 1$ est donnée par :

$$S_N = u_0 + u_1 + \cdots + u_{N-1} = u_0 \times \frac{1 - q^N}{1 - q}$$

Si le premier terme est u_1 , la somme des N premiers termes est $u_1 + \cdots + u_N = u_1 \times \frac{1 - q^N}{1 - q}$.

Point de méthode

Démontrer qu'une suite est géométrique Pour montrer qu'une suite (u_n) est géométrique, on doit calculer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (pour $u_n \neq 0$) et montrer que ce rapport est constant (ne dépend pas de n). Cette constante est la raison q .

Point de méthode**Calculer un terme de rang donné**

1. Identifiez le premier terme (u_0 ou u_1) et la raison q .
2. Utilisez la formule explicite $u_n = u_0 \times q^n$ (ou $u_n = u_1 \times q^{n-1}$) en remplaçant n par le rang souhaité.

Exemple 2.1 (Calcul de termes). Soit la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $q = 2$.

1. Calculez les quatre premiers termes de la suite : u_0, u_1, u_2, u_3 .
2. Calculez u_{10} .

Solution commentée :

1. Pour calculer les premiers termes, on utilise la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n \times q$.
 $u_0 = 4$ $u_1 = u_0 \times q = 4 \times 2 = 8$ $u_2 = u_1 \times q = 8 \times 2 = 16$ $u_3 = u_2 \times q = 16 \times 2 = 32$
2. Pour calculer u_{10} , on utilise la formule explicite $u_n = u_0 \times q^n$. Ici $n = 10$, $u_0 = 4$ et $q = 2$.
 $u_{10} = 4 \times 2^{10} = 4 \times 1024 = 4096$.

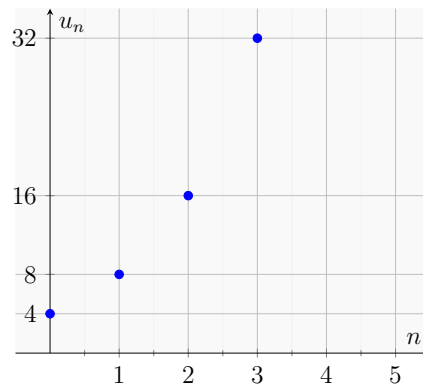
Exemple 2.2 (Modélisation de croissance bactérienne). Une population de bactéries double toutes les heures. Initialement, il y a 1000 bactéries. On note N_h le nombre de bactéries après h heures.

1. Déterminez la nature de la suite (N_h) et ses caractéristiques.
2. Exprimez N_h en fonction de h .
3. Quel sera le nombre de bactéries après 5 heures ?

Solution commentée :

1. Le nombre de bactéries **double toutes les heures**. Cela signifie qu'on multiplie la population par un facteur fixe à chaque heure. La suite (N_h) est donc une **suite géométrique**. Son premier terme est $N_0 = 1000$ (population initiale à $h = 0$). Sa raison est $q = 2$ (le facteur par lequel la population est multipliée).
2. La formule explicite pour une suite géométrique de premier terme N_0 est $N_h = N_0 \times q^h$.
Donc, $N_h = 1000 \times 2^h$.
3. Après 5 heures, on doit calculer N_5 . $N_5 = 1000 \times 2^5 = 1000 \times 32 = 32\,000$. Le nombre de bactéries après 5 heures sera de 32 000.

Remarque 2.2. Représentation graphique d'une suite géométrique Les termes d'une suite géométrique, lorsqu'ils sont représentés dans un repère (en plaçant n en abscisse et u_n en ordonnée), ne sont pas alignés. Ils forment une courbe typique de croissance (ou décroissance) exponentielle.



3 Fonctions Exponentielles : Modélisation Continue de la Croissance Exponentielle

Les fonctions exponentielles sont un prolongement naturel des suites géométriques lorsque la variable (le temps, la quantité, etc.) n'est plus seulement un entier, mais peut prendre n'importe quelle valeur réelle positive.

3.1 Définitions et Vocabulaire

Définition

Une **fonction exponentielle** est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = k \times a^x$$

où k est un nombre réel non nul (valeur initiale) et a est un nombre réel **strictement positif et différent de 1** (base de l'exponentielle).

- Le nombre a est la **base** de l'exponentielle.
- Le nombre k est la **valeur initiale** (lorsque $x = 0$, $f(0) = k \times a^0 = k \times 1 = k$).

Remarque 3.1. La fonction exponentielle la plus célèbre est la fonction exponentielle de base e , notée $\exp(x)$ ou e^x , où $e \approx 2,718$. C'est une fonction essentielle en mathématiques et sciences, car e^x est égale à sa propre dérivée. Toute fonction $f(x) = k \times a^x$ peut être réécrite sous la forme $f(x) = k \times e^{\lambda x}$ où $\lambda = \ln(a)$.

3.2 Propriétés Fondamentales

Propriété

Représentation graphique

La représentation graphique d'une fonction exponentielle $f(x) = k \times a^x$ (avec $k > 0$) est une courbe typique :

- Elle passe par le point $(0, k)$.
- Si $a > 1$, la courbe monte de plus en plus vite (croissance exponentielle).
- Si $0 < a < 1$, la courbe descend de plus en plus lentement vers l'axe des abscisses (décroissance exponentielle).

Propriété

Sens de variation (pour $k > 0$)

Soit $f(x) = k \times a^x$ une fonction exponentielle avec $k > 0$.

- Si $a > 1$, la fonction f est **strictement croissante**.
- Si $0 < a < 1$, la fonction f est **strictement décroissante**.

Cas $k < 0$: Les variations sont inversées.

Propriété

Propriétés des puissances

Pour $a > 0$, x et y des nombres réels :

- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $a^{x+y} = a^x \times a^y$
- $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$

Ces propriétés sont fondamentales pour manipuler les fonctions exponentielles.

Point de méthode

Représenter graphiquement une fonction exponentielle

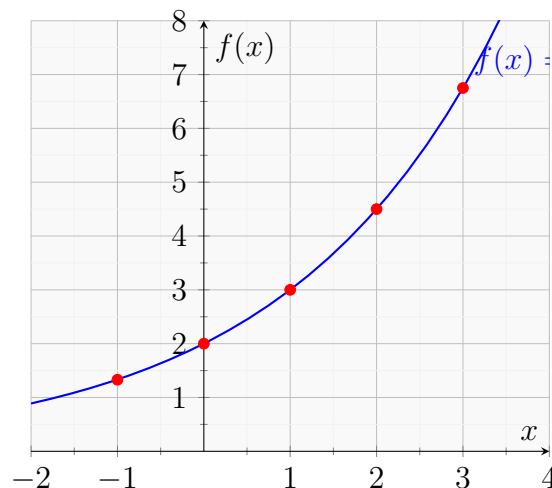
1. Placez la valeur initiale : le point $(0, k)$.
2. Calculez quelques autres points pour $x > 0$ et $x < 0$ si pertinent, et placez-les.
3. Tracez une courbe lisse passant par ces points, en respectant le sens de variation et la forme caractéristique de la croissance/décroissance exponentielle.

Exemple 3.1 (Représentation graphique). Représentez graphiquement la fonction $f(x) =$

$2 \times 1,5^x$.

Solution commentée :

1. Valeur initiale $k = 2$. Le point est $(0, 2)$.
2. Calculons quelques points : $f(1) = 2 \times 1,5^1 = 3$. Point $(1, 3)$. $f(2) = 2 \times 1,5^2 = 2 \times 2,25 = 4,5$. Point $(2, 4,5)$. $f(3) = 2 \times 1,5^3 = 2 \times 3,375 = 6,75$. Point $(3, 6,75)$. $f(-1) = 2 \times 1,5^{-1} = 2 \times \frac{1}{1,5} \approx 1,33$. Point $(-1, 1,33)$.
3. Puisque $a = 1,5 > 1$ et $k = 2 > 0$, la fonction est strictement croissante. La courbe s'approche de l'axe des abscisses pour $x \rightarrow -\infty$.



4 Lien entre Suites Géométriques et Fonctions Exponentielles

Les fonctions exponentielles sont la "version continue" des suites géométriques.

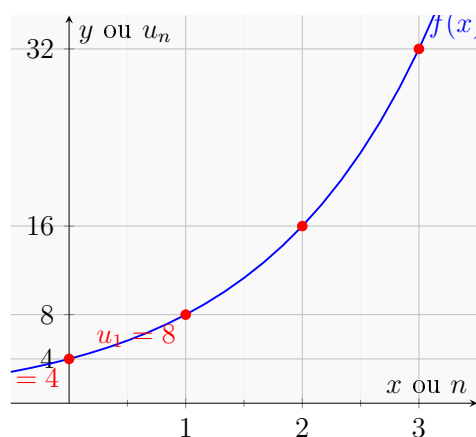
Propriété

Les termes d'une suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison q sont les images des nombres entiers n par la fonction exponentielle $f(x) = u_0 \times q^x$. Autrement dit, $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 4.1. La raison q de la suite géométrique est la base a de la fonction exponentielle. Le premier terme u_0 de la suite géométrique est la valeur initiale k de la fonction exponentielle.

Exemple 4.1 (Représentation conjointe). Reprenons la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $q = 2$. Sa formule explicite est $u_n = 4 \times 2^n$. La fonction exponentielle associée est $f(x) = 4 \times 2^x$.

Graphiquement, les points de la suite $(0, u_0), (1, u_1), (2, u_2), \dots$ sont des points de la courbe d'équation $y = 4 \times 2^x$.



5 Modélisation de situations de croissance exponentielle

Choisir entre une suite géométrique et une fonction exponentielle pour modéliser une croissance exponentielle dépend de la nature discrète ou continue du phénomène.

Point de méthode

Modéliser un phénomène de croissance exponentielle

- Si le phénomène évolue par étapes fixes, à des intervalles réguliers (années, mois, nombre de générations), et qu'il y a un **taux de changement constant en pourcentage**, utilisez une **suite géométrique**.
 - Identifiez le premier terme (u_0 ou u_1).
 - Identifiez la raison q (facteur multiplicatif). Si le pourcentage d'augmentation est $p\%$, alors $q = 1 + \frac{p}{100}$. Si le pourcentage de diminution est $p\%$, alors $q = 1 - \frac{p}{100}$.
- Si le phénomène évolue de manière continue sur un intervalle (temps, quantité continue) et qu'il y a un **taux de changement relatif constant**, utilisez une **fonction exponentielle**.
 - Identifiez la valeur initiale k .
 - Identifiez la base a (facteur multiplicatif par unité de x).

Exemple 5.1 (Placement financier à intérêts composés). On place 1000 € sur un compte à un taux d'intérêt annuel de 2 %, avec capitalisation des intérêts chaque année. Soit C_n le capital après n années.

1. Modélisez C_n par une suite géométrique.
2. Quel capital aura-t-on après 10 ans ?

Solution commentée :

1. Le capital augmente de 2 % chaque année. C'est une augmentation multiplicative constante. Il s'agit donc d'une **suite géométrique**. Premier terme : $C_0 = 1000$ € (capital initial). Raison : Une augmentation de 2 % correspond à un facteur multiplicatif de $1 + \frac{2}{100} = 1 + 0,02 = 1,02$. Donc $q = 1,02$. Le modèle est $C_n = 1000 \times (1,02)^n$.
2. Après 10 ans, on calcule C_{10} : $C_{10} = 1000 \times (1,02)^{10} \approx 1000 \times 1,21899 \approx 1218,99$ €.

Exemple 5.2 (Désintégration radioactive). La quantité d'une substance radioactive diminue de 5 % par heure. Initialement, on a 200 grammes de cette substance. Soit $Q(t)$ la quantité de substance (en grammes) restante après t heures.

1. Modélisez $Q(t)$ par une fonction exponentielle.
2. Quelle quantité restera-t-il après 24 heures ?

Solution commentée :

1. La quantité diminue de 5 % par heure. C'est une diminution multiplicative continue. Il s'agit donc d'une **fonction exponentielle**. Valeur initiale : $k = 200$ g (quantité à $t = 0$). Base : Une diminution de 5 % correspond à un facteur multiplicatif de $1 - \frac{5}{100} = 1 - 0,05 = 0,95$. Donc $a = 0,95$. Le modèle est $Q(t) = 200 \times (0,95)^t$.
2. Après 24 heures, on calcule $Q(24)$: $Q(24) = 200 \times (0,95)^{24} \approx 200 \times 0,2824 \approx 56,48$ g.

6 Résolution de problèmes de seuil (avec les logarithmes)

La résolution de problèmes de seuil pour les croissances exponentielles nécessite l'utilisation de la fonction logarithme népérien ($\ln$).

Propriété

Rappels sur les logarithmes La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base e . Pour $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, $y = \ln(x) \iff x = e^y$. Propriétés essentielles pour la résolution d'équations/inéquations :

- $\ln(a^x) = x \ln(a)$ pour $a > 0$
- La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Cela signifie que pour $A > 0, B > 0$: $A < B \iff \ln(A) < \ln(B)$

Point de méthode

Résoudre un problème de seuil pour une croissance exponentielle

1. **Modélisez** la situation par une suite géométrique ($u_n = u_0 \times q^n$) ou une fonction exponentielle ($f(x) = k \times a^x$).
2. **Formulez l'inéquation** (ou équation) appropriée, par exemple $u_0 \times q^n > S$ ou $k \times a^x < S$.
3. **Isolez la puissance** : Divisez par u_0 ou k . Attention au signe si u_0 ou k sont négatifs (cela change le sens de l'inégalité).
4. **Appliquez le logarithme népérien** ($\ln$) de chaque côté de l'inéquation. Utilisez la propriété $\ln(A^B) = B \ln(A)$.
5. **Isolez la variable** (n ou x). Attention au signe de $\ln(q)$ ou $\ln(a)$ lors de la division :
 - Si $q > 1$ (ou $a > 1$), alors $\ln(q) > 0$ (ou $\ln(a) > 0$). Le sens de l'inégalité ne change pas.
 - Si $0 < q < 1$ (ou $0 < a < 1$), alors $\ln(q) < 0$ (ou $\ln(a) < 0$). Le sens de l'inégalité change.
6. **Interprétez le résultat** en fonction du contexte du problème (arrondi à l'entier supérieur/inférieur si n , ou intervalle si x).

Exemple 6.1 (Seuil de capital). Reprenons l'exemple du placement financier : $C_n = 1000 \times (1,02)^n$. À partir de combien d'années le capital dépassera-t-il 1500 € ?

Solution commentée : On cherche la plus petite valeur de n telle que $C_n > 1500$. $1000 \times (1,02)^n > 1500$ $(1,02)^n > \frac{1500}{1000}$ $(1,02)^n > 1,5$

On applique $\ln$ aux deux membres (la base $1,02 > 1$, donc $\ln(1,02) > 0$) : $\ln((1,02)^n) > \ln(1,5)$ $n \ln(1,02) > \ln(1,5)$ $n > \frac{\ln(1,5)}{\ln(1,02)}$

Calculons les valeurs numériques : $\ln(1,5) \approx 0,405$ $\ln(1,02) \approx 0,0198$ $n > \frac{0,405}{0,0198} \approx 20,45$

Puisque n est un nombre d'années (entier), Camille devra attendre $n = 21$ ans pour que le capital dépasse 1500 €.

Exemple 6.2 (Temps de désintégration). Reprenons la désintégration radioactive : $Q(t) = 200 \times (0,95)^t$. Au bout de combien de temps la quantité de substance sera-t-elle inférieure à 50 grammes ?

Solution commentée : On cherche la valeur de t telle que $Q(t) < 50$. $200 \times (0,95)^t < 50$ $(0,95)^t < \frac{50}{200}$ $(0,95)^t < 0,25$

On applique $\ln$ aux deux membres (la base $0,95 < 1$, donc $\ln(0,95) < 0$, il faut changer le sens de l'inégalité) : $\ln((0,95)^t) < \ln(0,25)$ $t \ln(0,95) < \ln(0,25)$ $t > \frac{\ln(0,25)}{\ln(0,95)}$ (le sens a changé car on a divisé par un nombre négatif)

Calculons les valeurs numériques : $\ln(0,25) \approx -1,386$ $\ln(0,95) \approx -0,0513$ $t > \frac{-1,386}{-0,0513} \approx 27,02$

La quantité de substance sera inférieure à 50 grammes au bout de 27,02 heures environ.