

Polycopié de cours - 5^e

Organisation et gestion de données, fonctions

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons découvrir comment recueillir, organiser, interpréter et représenter des données. Nous apprendrons également à calculer et interpréter la moyenne d'une série de données. Enfin, nous aborderons la notion fondamentale de fonction, en traduisant les relations de dépendance entre grandeurs par des tableaux de valeurs et des formules.

2 Interpréter, représenter et traiter des données

Cette partie du programme vise à développer votre capacité à manipuler des informations numériques, compétence essentielle dans de nombreux domaines de la vie quotidienne et professionnelle.

2.1 Recueillir et organiser des données

Le point de départ de toute analyse de données est leur collecte et leur structuration.

Définition

Donnée brute : Une donnée brute est une information collectée telle quelle, sans avoir été organisée ou traitée.

Série de données : Une série de données est un ensemble de plusieurs données.

Point de méthode

Pour organiser des données brutes, il est souvent utile de les classer ou de les présenter sous forme de tableau.

2.1.1 Tableaux d'effectifs

Un tableau d'effectifs permet de synthétiser des données en regroupant les valeurs identiques et en comptant leur apparition.

Définition

Effectif : L'effectif d'une valeur est le nombre de fois où cette valeur apparaît dans une série de données.

Effectif total : L'effectif total est le nombre total de données dans la série.

Exemple commenté : Pointures de chaussures On a demandé à 21 élèves leur pointure de pieds. Voici les résultats : 38 ; 36 ; 38 ; 35 ; 34 ; 37 ; 37 ; 40 ; 39 ; 41 ; 39 ; 41 ; 37 ; 36 ; 36 ; 42 ; 41 ; 37 ; 39 ; 38 ; 37.

Étape 1 : Identifier les différentes valeurs Les pointures sont : 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42.

Étape 2 : Compter l'effectif de chaque valeur

- Pointure 34 : 1 élève
- Pointure 35 : 1 élève
- Pointure 36 : 3 élèves
- Pointure 37 : 5 élèves

- Pointure 38 : 3 élèves
- Pointure 39 : 3 élèves
- Pointure 40 : 1 élève
- Pointure 41 : 3 élèves
- Pointure 42 : 1 élève

Étape 3 : Organiser dans un tableau d'effectifs

Pointure	34	35	36	37	38	39	40	41	42	Total
Effectif	1	1	3	5	3	3	1	3	1	21

2.2 Calculer des fréquences

La fréquence permet de mesurer la proportion d'une valeur par rapport à l'effectif total.

Définition

Fréquence : La fréquence d'une valeur est le quotient de l'effectif de cette valeur par l'effectif total. Elle peut être exprimée sous forme de fraction, de nombre décimal ou de pourcentage.

Propriété

La somme des fréquences (en valeur décimale ou fractionnaire) est égale à 1. La somme des fréquences en pourcentage est égale à 100%.

Point de méthode

Pour calculer une fréquence :

- **En fraction** : Fréquence = $\frac{\text{Effectif de la valeur}}{\text{Effectif total}}$
- **En nombre décimal** : Effectuer la division de la fraction.
- **En pourcentage** : Multiplier la fréquence décimale par 100.

Exemple commenté : Fréquence de sport pratiqué Un sondage a été réalisé auprès de 80 élèves d'un collège concernant le sport qu'ils pratiquent principalement.

Sport	Football	Tennis	Basket-ball	Athlétisme	TOTAL
Effectif	26	15	23	?	80
Fréquence (en %)					

Étape 1 : Calculer l'effectif manquant L'effectif total est 80. L'effectif d'athlétisme est : $80 - (26 + 15 + 23) = 80 - 64 = 16$.

Étape 2 : Calculer la fréquence pour chaque sport (en %)

- Football : $\frac{26}{80} \times 100 = 0,325 \times 100 = 32,5\%$
- Tennis : $\frac{15}{80} \times 100 = 0,1875 \times 100 = 18,75\%$
- Basket-ball : $\frac{23}{80} \times 100 = 0,2875 \times 100 = 28,75\%$
- Athlétisme : $\frac{16}{80} \times 100 = 0,2 \times 100 = 20\%$

Étape 3 : Compléter le tableau

Sport	Football	Tennis	Basket-ball	Athlétisme	TOTAL
Effectif	26	15	23	16	80
Fréquence (en %)	32,5 %	18,75 %	28,75 %	20 %	100 %

2.3 Représenter graphiquement des données

Les représentations graphiques permettent de visualiser rapidement la répartition des données.

Point de méthode

Pour représenter des données :

- **Diagramme en bâtons** : Utilisé pour les caractères discrets. Chaque bâton représente l'effectif ou la fréquence d'une modalité.
- **Diagramme circulaire ou semi-circulaire** : Utilisé pour montrer la proportion de chaque modalité par rapport au total. Pour cela, il faut calculer l'angle de chaque secteur.

Propriété**Calcul de l'angle pour un diagramme circulaire :**

L'angle d'un secteur est proportionnel à l'effectif (ou la fréquence) de la valeur correspondante.

Angle = $\frac{\text{Effectif de la valeur}}{\text{Effectif total}} \times 360^\circ$ (pour un cercle complet) ou $\times 180^\circ$ (pour un demi-cercle).

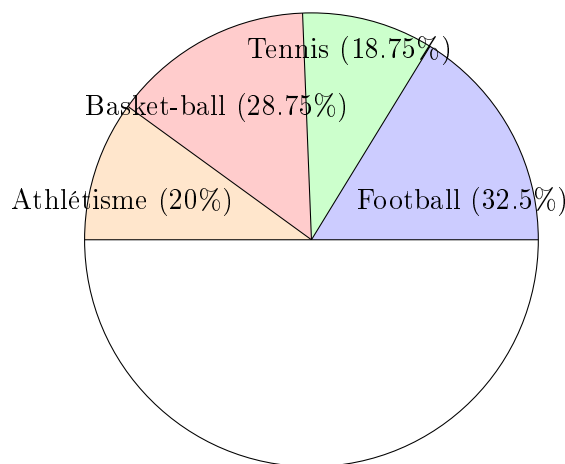
Remarque pédagogique Un diagramme circulaire dont les angles dépassent 180° pour un secteur est moins facile à lire visuellement. Le programme de 5^e se limite aux angles inférieurs ou égaux à 180° pour ces diagrammes.

Exemple : Diagramme semi-circulaire des sports Reprenons l'exemple des sports. Nous allons construire un diagramme semi-circulaire. L'angle total est de 180° .

Étape 1 : Calculer l'angle pour chaque sport

- Football : $\frac{26}{80} \times 180^\circ = 0,325 \times 180^\circ = 58,5^\circ$
- Tennis : $\frac{15}{80} \times 180^\circ = 0,1875 \times 180^\circ = 33,75^\circ$
- Basket-ball : $\frac{23}{80} \times 180^\circ = 0,2875 \times 180^\circ = 51,75^\circ$
- Athlétisme : $\frac{16}{80} \times 180^\circ = 0,2 \times 180^\circ = 36^\circ$

Étape 2 : Vérifier la somme des angles $58,5^\circ + 33,75^\circ + 51,75^\circ + 36^\circ = 180^\circ$.

Étape 3 : Dessiner le diagramme

2.4 Calculer et interpréter la moyenne

La moyenne est un indicateur de position qui résume une série de données par une valeur unique.

Définition

Moyenne : La moyenne d'une série de données est la somme de toutes les valeurs de la série divisée par l'effectif total (nombre de valeurs).

Propriété

Il existe deux types de moyennes que nous allons aborder en 5^e : la moyenne simple et la moyenne pondérée.

2.4.1 Moyenne simple

La moyenne simple s'applique lorsque chaque valeur n'apparaît qu'une seule fois ou est considérée individuellement.

Point de méthode

Pour calculer la moyenne simple : $\text{Moyenne} = \frac{\text{Somme des valeurs}}{\text{Nombre de valeurs}}$

Exemple commenté : Notes de mathématiques Voici les notes obtenues par un élève en mathématiques au premier trimestre : 12 ; 10 ; 15 ; 8 ; 13.

Étape 1 : Additionner toutes les notes Somme des notes = $12 + 10 + 15 + 8 + 13 = 58$.

Étape 2 : Diviser par le nombre de notes Il y a 5 notes. Moyenne = $\frac{58}{5} = 11,6$.

La moyenne de cet élève en mathématiques est 11,6.

2.4.2 Moyenne pondérée

La moyenne pondérée est utilisée lorsque certaines valeurs apparaissent plusieurs fois (avec des effectifs) ou ont des "poids" différents (coefficients).

Point de méthode

Pour calculer la moyenne pondérée : $\text{Moyenne} = \frac{\text{Somme de (chaque valeur} \times \text{son effectif/coefficient)}}{\text{Somme des effectifs/coefficients}}$

Exemple commenté : Pointures de chaussures (suite) Reprenons le tableau des pointures :

Pointure	34	35	36	37	38	39	40	41	42	Total
Effectif	1	1	3	5	3	3	1	3	1	21

Étape 1 : Multiplier chaque pointure par son effectif et additionner les produits $(34 \times 1) + (35 \times 1) + (36 \times 3) + (37 \times 5) + (38 \times 3) + (39 \times 3) + (40 \times 1) + (41 \times 3) + (42 \times 1) = 34 + 35 + 108 + 185 + 114 + 117 + 40 + 123 + 42 = 798$.

Étape 2 : Diviser par l'effectif total Moyenne = $\frac{798}{21} \approx 38$.

La pointure moyenne de ce groupe d'élèves est environ 38.

Remarque pédagogique La moyenne est un bon indicateur pour résumer une série de données, mais elle ne remplace pas l'ensemble des données. Deux séries différentes peuvent avoir la même moyenne. Il est toujours important de regarder la répartition des données (par exemple avec un diagramme) pour avoir une meilleure compréhension.

3 Comprendre et utiliser la notion de fonction

La notion de fonction est fondamentale en mathématiques. Elle permet de décrire des relations de dépendance entre des grandeurs.

3.1 Relation de dépendance entre deux grandeurs

Définition

On dit qu'une grandeur dépend d'une autre si la valeur de la première grandeur est déterminée par la valeur de la seconde.

Exemple : Prix des pommes Le prix à payer pour des pommes dépend de la masse de pommes achetée. Si 1 kg de pommes coûte 2 €, alors :

- 2 kg coûtent $2 \times 2 = 4$ €
- 3 kg coûtent $2 \times 3 = 6$ €
- ...

Ici, le prix (grandeur dépendante) dépend de la masse (grandeur indépendante).

3.2 Traduire une relation par un tableau de valeurs

Un tableau de valeurs est une manière d'organiser les paires de valeurs liées par une relation de dépendance.

Point de méthode

Pour construire un tableau de valeurs à partir d'une formule :

- Identifiez les deux grandeurs en relation (celle qui dépend et celle dont elle dépend).
- Choisissez plusieurs valeurs pour la grandeur indépendante.
- Utilisez la formule pour calculer la valeur correspondante de la grandeur dépendante.

Exemple commenté : Distance de freinage La distance de freinage D (en mètres) d'une voiture sur route sèche peut être approximée par la formule $D = \frac{V^2}{200}$, où V est la vitesse (en km/h). Traduire cette relation par un tableau de valeurs pour des vitesses de 50 km/h, 90 km/h et 130 km/h.

Étape 1 : Identifier les grandeurs Grandeur indépendante : Vitesse (V) en km/h. Grandeur dépendante : Distance de freinage (D) en mètres.

Étape 2 : Calculer D pour chaque valeur de V

- Pour $V = 50$ km/h : $D = \frac{50^2}{200} = \frac{2500}{200} = 12,5$ m.
- Pour $V = 90$ km/h : $D = \frac{90^2}{200} = \frac{8100}{200} = 40,5$ m.
- Pour $V = 130$ km/h : $D = \frac{130^2}{200} = \frac{16900}{200} = 84,5$ m.

Étape 3 : Organiser les résultats dans un tableau

Vitesse V (en km/h)	50	90	130
Distance de freinage D (en m)	12,5	40,5	84,5

Remarque pédagogique Un tableau de valeurs ne représente que quelques points de la relation. Pour avoir une vue d'ensemble, on utilise souvent une représentation graphique ou une formule générale.

3.3 Produire une formule représentant la dépendance

Une formule (ou expression littérale) permet de décrire de manière générale la relation entre deux grandeurs.

Point de méthode

Pour produire une formule :

- Identifiez la grandeur de départ (souvent notée x) et la grandeur d'arrivée (souvent notée y ou $f(x)$).
- Décrivez les opérations successives qui transforment la grandeur de départ en grandeur d'arrivée.

Exemple commenté : Aire d'un carré Exprimer l'aire d'un carré en fonction de la longueur de son côté.

Étape 1 : Identifier les grandeurs et choisir des variables Grandeur indépendante : Longueur du côté. Notons-la c . Grandeur dépendante : Aire du carré. Notons-la A .

Étape 2 : Rappeler la règle de calcul de l'aire d'un carré L'aire d'un carré est égale au côté multiplié par le côté.

Étape 3 : Écrire la formule $A = c \times c$, ce qui s'écrit aussi $A = c^2$.

La formule représentant l'aire d'un carré en fonction de la longueur de son côté est $A = c^2$.

Exemple commenté : Volume d'un cylindre Exprimer le volume d'un cylindre de rayon 3 cm en fonction de sa hauteur.

Étape 1 : Identifier les grandeurs et choisir des variables Grandeur indépendante : Hauteur du cylindre. Notons-la h . Grandeur dépendante : Volume du cylindre. Notons-le V . Le rayon est une constante ici : $r = 3$ cm.

Étape 2 : Rappeler la règle de calcul du volume d'un cylindre Le volume d'un cylindre est donné par la formule $V = \pi \times r^2 \times h$.

Étape 3 : Substituer la valeur connue du rayon dans la formule $V = \pi \times 3^2 \times h$
 $V = \pi \times 9 \times h$ $V = 9\pi h$.

La formule représentant le volume d'un cylindre de rayon 3 cm en fonction de sa hauteur est $V = 9\pi h$.

Remarque pédagogique L'utilisation de lettres (variables) pour représenter des grandeurs est au cœur du calcul littéral et de la notion de fonction. Cela permet de généraliser un calcul et de l'appliquer à n'importe quelle valeur de la grandeur indépendante.