
Leçon de Mathématiques - 5^e

NOMBRES ET CALCULS

Table des matières

1	Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes	2
1.1	Nombres décimaux et fractions	2
1.2	Notion d'opposé	3
1.3	Comparaison de nombres	3
2	Pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté	5
2.1	Priorités opératoires	5
2.2	Opérations sur les nombres relatifs et les fractions	5
3	Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers	7
3.1	Division euclidienne	7
3.2	Multiples et diviseurs	7
3.3	Nombres premiers et décomposition en facteurs premiers	8
3.4	Problèmes avec multiples et diviseurs	9
4	Utiliser le calcul littéral	11
4.1	Simplification d'expressions littérales	11
4.2	Élaborer et traduire des expressions littérales	12
4.3	Démontrer des propriétés générales	12
4.4	Substitution et tests numériques	13

1 Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes

1.1 Nombres décimaux et fractions

Les nombres décimaux et les fractions sont deux façons d'écrire les nombres. En 5^e, il est essentiel de pouvoir passer de l'une à l'autre et de les utiliser dans la résolution de problèmes.

Point de méthode

Pour passer d'une écriture fractionnaire à une écriture décimale, effectuez la division du numérateur par le dénominateur.

Pour passer d'une écriture décimale à une écriture fractionnaire, utilisez les puissances de 10.

Exemple : Conversion d'écritures

Énoncé : Exprimer le nombre $2,5 + \frac{23}{100} + \frac{7}{5}$ sous formes décimale et fractionnaire.

Solution :

step 1. **Forme décimale :** Convertissons toutes les fractions en décimaux. $\frac{23}{100} = 0,23$

$$\frac{7}{5} = \frac{14}{10} = 1,4$$

Maintenant, additionnons les nombres décimaux :

$$2,5 + 0,23 + 1,4 = 4,13$$

Donc, la forme décimale est 4,13.

step 2. **Forme fractionnaire :** Convertissons tous les nombres en fractions avec un dénominateur commun (ici 100 est un bon choix). $2,5 = \frac{25}{10} = \frac{250}{100}$

$$\frac{7}{5} = \frac{7 \times 20}{5 \times 20} = \frac{140}{100}$$

Maintenant, additionnons les fractions :

$$\frac{250}{100} + \frac{23}{100} + \frac{140}{100} = \frac{250+23+140}{100} = \frac{413}{100}$$

Donc, la forme fractionnaire est $\frac{413}{100}$.

Propriété

Fractions, proportions et pourcentages

Les fractions, les proportions et les pourcentages sont des concepts liés. Un pourcentage est une fraction dont le dénominateur est 100.

Exemple : Calcul de pourcentage

Énoncé : Calculer 20% de 70 €.

Solution :

step 1. **Avec une fraction :** $20\% = \frac{20}{100}$

$$\frac{20}{100} \times 70 = \frac{1400}{100} = 14$$

step 2. **Avec un nombre décimal :** $20\% = 0,2$

$$0,2 \times 70 = 14$$

20% de 70 € est 14 €.

Propriété

Décomposition d'une fraction

Il est possible de décomposer une fraction en une somme (ou une différence) d'un entier et d'une fraction.

Exemple : Décomposition de fractions

Énoncé : Décomposer la fraction $\frac{15}{7}$.

Solution :

step 1. **Somme d'un entier et d'une fraction :** Effectuons la division euclidienne de 15 par 7 :
 $15 = 2 \times 7 + 1$. Donc, $\frac{15}{7} = \frac{2 \times 7 + 1}{7} = \frac{2 \times 7}{7} + \frac{1}{7} = 2 + \frac{1}{7}$.

step 2. **Différence d'un entier et d'une fraction (moins courant mais possible) :** On peut aussi écrire $15 = 3 \times 7 - 6$. Donc, $\frac{15}{7} = \frac{3 \times 7 - 6}{7} = \frac{3 \times 7}{7} - \frac{6}{7} = 3 - \frac{6}{7}$.

1.2 Notion d'opposé

Définition

Opposé d'un nombre

L'opposé d'un nombre est le nombre qui, additionné à celui-ci, donne zéro. On l'obtient en changeant le signe du nombre.

Exemple : Déterminer l'opposé

Énoncé : Déterminer l'opposé de 5, de -3,2 et de $\frac{1}{2}$.

Solution :

- L'opposé de 5 est -5 car $5 + (-5) = 0$.
- L'opposé de -3,2 est 3,2 car $-3,2 + 3,2 = 0$.
- L'opposé de $\frac{1}{2}$ est $-\frac{1}{2}$ car $\frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) = 0$.

Propriété

Soustraction et opposé

Soustraire un nombre revient à additionner son opposé.

Exemple : Soustraire en additionnant l'opposé

Énoncé : Calculer $7 - (-4)$ et $-5 - 3$.

Solution :

- $7 - (-4)$: L'opposé de -4 est 4. Donc, $7 - (-4) = 7 + 4 = 11$.
- $-5 - 3$: L'opposé de 3 est -3. Donc, $-5 - 3 = -5 + (-3) = -8$.

1.3 Comparaison de nombres

Propriété

Fractions égales

Deux fractions sont égales si l'on peut passer de l'une à l'autre en multipliant (ou en divisant) le numérateur et le dénominateur par le même nombre non nul.

Exemple : Identifier des fractions égales

Énoncé : Dans la liste suivante, entourer toutes les fractions égales à $\frac{14}{6}$: $\frac{28}{6}$; $\frac{7}{3}$; $\frac{140}{60}$; $\frac{15}{7}$; $\frac{56}{24}$.

Solution : Simplifions $\frac{14}{6}$ au maximum : $\frac{14 \div 2}{6 \div 2} = \frac{7}{3}$. Maintenant, vérifions chaque fraction :

- $\frac{28}{6}$: N'est pas égale à $\frac{7}{3}$ (dénominateurs différents, numérateurs non proportionnels).
- $\frac{7}{3}$: Est égale à $\frac{14}{6}$.
- $\frac{140}{60}$: $\frac{140 \div 20}{60 \div 20} = \frac{7}{3}$. Est égale à $\frac{14}{6}$.

- $\frac{15}{7}$: N'est pas égale à $\frac{7}{3}$.
- $\frac{56}{24} : \frac{56 \div 8}{24 \div 8} = \frac{7}{3}$. Est égale à $\frac{14}{6}$.

Les fractions égales à $\frac{14}{6}$ sont : $\frac{7}{3}$, $\frac{140}{60}$, $\frac{56}{24}$.

Propriété

Comparer, ranger, encadrer des fractions

Pour comparer, ranger ou encadrer des fractions, il est souvent utile de les réduire au même dénominateur ou de les convertir en écriture décimale.

Exemple : Ranger des fractions et des nombres

Énoncé : Ranger dans l'ordre croissant : $\frac{1}{3}$; $\frac{25}{6}$; 2 ; $\frac{5}{3}$.

Solution :

- step 1. **Mettre au même dénominateur (6) ou convertir en décimaux :** $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ ou 0,33...
 $\frac{25}{6} = \frac{25}{6}$ ou 4,16... $2 = \frac{12}{6}$ ou 2,0 $\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$ ou 1,66...
- step 2. **Comparer les numérateurs ou les décimaux :** $2 < 10 < 12 < 25$ pour les numérateurs.
 $0,33... < 1,66... < 2,0 < 4,16...$ pour les décimaux.
- step 3. **Ranger dans l'ordre croissant :** $\frac{1}{3} < \frac{5}{3} < 2 < \frac{25}{6}$.

Exemple : Encadrer une fraction

Énoncé : Compléter les encadrements suivants par deux entiers consécutifs : $... < \frac{15}{7} < ...$
 et $... < \frac{-20}{3} < ...$

Solution :

- Pour $\frac{15}{7}$: $15 \div 7 \approx 2,14$. Donc, $2 < \frac{15}{7} < 3$.
- Pour $\frac{-20}{3}$: $-20 \div 3 \approx -6,66$. Donc, $-7 < \frac{-20}{3} < -6$. (Attention au sens pour les nombres négatifs !)

Point de méthode

Repérer des nombres sur une droite graduée

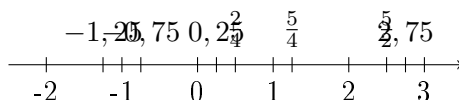
Pour placer des nombres décimaux relatifs sur une droite graduée, il faut choisir une unité appropriée et positionner les nombres en fonction de leur valeur et de leur signe par rapport à l'origine (0).

Exemple : Placer des nombres sur une droite graduée

Énoncé : Placer sur la droite graduée les nombres suivants : $\frac{2}{4}$; $0,25$; $-0,75$; $\frac{5}{4}$; $2,75$; $\frac{5}{2}$; $-1,25$.

Solution : Convertissons tout en écriture décimale : $\frac{2}{4} = 0,5$ $\frac{5}{4} = 1,25$ $\frac{5}{2} = 2,5$

Maintenant, plaçons-les sur la droite :



2 Pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté

2.1 Priorités opératoires

Propriété

Ordre des opérations

Dans un enchaînement d'opérations, il faut respecter un ordre précis :

1. Les calculs entre parenthèses (en commençant par les plus intérieures).
2. Les multiplications et les divisions, de gauche à droite.
3. Les additions et les soustractions, de gauche à droite.

Point de méthode

Traduire un enchaînement d'opérations

Un programme de calcul peut être traduit par une expression mathématique avec des parenthèses pour respecter l'ordre des opérations.

Exemple : Traduction d'un programme de calcul

Énoncé : Pour appliquer le programme de calcul ci-contre au nombre 7, traduire l'enchaînement d'opérations.

- ◇ Choisir un nombre.
- ◇ Ajouter 3.
- ◇ Multiplier par 9.
- ◇ Soustraire 5.

Solution : Si le nombre choisi est 7 :

- Choisir 7.
- Ajouter 3 : $7+3$. (Le résultat de cette addition est prioritaire, donc il faut des parenthèses).
- Multiplier par 9 : $(7+3) \times 9$.
- Soustraire 5 : $(7+3) \times 9 - 5$.

L'expression est donc $(7+3) \times 9 - 5$.

Exemple : Calculer un enchaînement d'opérations

Énoncé : Calculer $5 + 3 \times 4$; $10 - (1 + 6)$; $12 - 8 + 2$.

Solution :

- $5 + 3 \times 4$: La multiplication est prioritaire. $5 + (3 \times 4) = 5 + 12 = 17$.
- $10 - (1 + 6)$: Le calcul entre parenthèses est prioritaire. $10 - 7 = 3$.
- $12 - 8 + 2$: Les additions et soustractions se font de gauche à droite. $(12 - 8) + 2 = 4 + 2 = 6$.

2.2 Opérations sur les nombres relatifs et les fractions

Propriété

Addition et soustraction de nombres décimaux relatifs

- ◇ Pour additionner deux nombres relatifs de **même signe** : On garde le signe commun et on additionne les distances à zéro.

- ◇ Pour additionner deux nombres relatifs de **signes différents** : On prend le signe du nombre qui a la plus grande distance à zéro et on soustrait les distances à zéro (la plus grande moins la plus petite).
- ◇ Pour soustraire un nombre relatif : On ajoute son opposé.

Exemple : Calculs avec des nombres relatifs

Énoncé : Calculer mentalement : $-9 + 6$; $-5,6 - 3$; $4 - 9 - 12 - (-2)$.

Solution :

- $-9 + 6$: Signes différents. Le signe de -9 est pris (plus grande distance à zéro). $9 - 6 = 3$.
Donc $-9 + 6 = -3$.
- $-5,6 - 3$: Soustraire 3 revient à ajouter son opposé -3. $-5,6 + (-3)$. Signes identiques.
 $-5,6 + (-3) = -8,6$.
- $4 - 9 - 12 - (-2)$: $4 - 9 = -5$; $-5 - 12 = -17$; $-17 - (-2) = -17 + 2 = -15$.

Propriété

Addition et soustraction de fractions

- ◇ Si les fractions ont le **même dénominateur** : On additionne (ou soustrait) les numérateurs et on garde le dénominateur commun.
- ◇ Si les dénominateurs sont **multiples l'un de l'autre** : On réduit les fractions au même dénominateur avant d'effectuer l'opération.

Exemple : Calculs avec des fractions

Énoncé : Calculer, sans passer par l'écriture décimale : $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}$; $\frac{23}{10} - \frac{5}{10}$; $\frac{5}{12} + \frac{4}{3}$; $\frac{11}{9} - \frac{1}{3}$.

Solution :

- $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{1+2}{5} = \frac{3}{5}$
- $\frac{23}{10} - \frac{5}{10} = \frac{23-5}{10} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$
- $\frac{5}{12} + \frac{4}{3}$: Le dénominateur commun est 12 (car $12 = 3 \times 4$). $\frac{4}{3} = \frac{4 \times 4}{3 \times 4} = \frac{16}{12}$. Donc, $\frac{5}{12} + \frac{16}{12} = \frac{5+16}{12} = \frac{21}{12} = \frac{7}{4}$.
- $\frac{11}{9} - \frac{1}{3}$: Le dénominateur commun est 9 (car $9 = 3 \times 3$). $\frac{1}{3} = \frac{1 \times 3}{3 \times 3} = \frac{3}{9}$. Donc, $\frac{11}{9} - \frac{3}{9} = \frac{11-3}{9} = \frac{8}{9}$.

Remarque pédagogique : Contrôle de la vraisemblance d'un résultat

Il est crucial de toujours contrôler la vraisemblance d'un résultat. Un résultat aberrant (par exemple, la taille d'une personne de 8,12 m) indique une erreur de calcul.

3 Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers

3.1 Division euclidienne

Définition

Division euclidienne

La division euclidienne d'un entier naturel A (le dividende) par un entier naturel B non nul (le diviseur) est l'opération qui permet de trouver deux entiers :

- ◇ Le quotient Q (nombre de fois que B est contenu dans A).
- ◇ Le reste R (ce qu'il reste après avoir retiré B autant de fois que possible de A).

Cette relation s'écrit : $A = B \times Q + R$, avec $0 \leq R < B$.

Exemple : Calculer un quotient et un reste

Énoncé : 147 élèves sont répartis par équipe de 16 pour un concours.

- a) Combien d'équipes entières peut-on constituer ?
- b) Combien manquerait-il d'élèves pour constituer la dernière équipe ?

Solution :

- a) On effectue la division euclidienne de 147 par 16. $147 = 16 \times 9 + 3$. Le quotient est 9, donc on peut constituer 9 équipes entières.
- b) Le reste est 3. Il reste 3 élèves. Pour constituer une équipe entière de 16 élèves, il manquerait $16 - 3 = 13$ élèves.

3.2 Multiples et diviseurs

Définition

Multiple

Un entier A est un multiple d'un entier B si $A = B \times k$, où k est un entier. Cela signifie que la division de A par B a un reste de 0.

Définition

Diviseur

Un entier B est un diviseur d'un entier A si la division de A par B a un reste de 0.

Exemple : Identifier multiples et diviseurs

Énoncé :

- a) Identifier les multiples de 14 parmi les nombres suivants : 56 ; 141 ; 280.
- b) Dresser la liste des diviseurs de 28.

Solution :

- a) Pour savoir si un nombre est un multiple de 14, on divise le nombre par 14 et on vérifie si le reste est nul.
 - $56 \div 14 = 4$ (reste 0). Donc 56 est un multiple de 14.
 - $141 \div 14 \approx 10,07$ (le reste n'est pas 0). Donc 141 n'est pas un multiple de 14.
 - $280 \div 14 = 20$ (reste 0). Donc 280 est un multiple de 14.

- b) Pour trouver les diviseurs de 28, on cherche les couples d'entiers dont le produit est 28.
 $1 \times 28 = 28$ $2 \times 14 = 28$ $4 \times 7 = 28$ Les diviseurs de 28 sont : 1, 2, 4, 7, 14, 28.

Propriété

Critères de divisibilité

Un nombre est divisible par :

- ◇ **2** si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 (il est pair).
- ◇ **3** si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.
- ◇ **5** si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- ◇ **9** si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.
- ◇ **10** si son chiffre des unités est 0.

Exemple : Appliquer les critères de divisibilité

Énoncé : Déterminer, parmi les nombres 2, 3, 5, 9 et 10, les diviseurs de 456 et 1980.

Solution :

► **Pour 456 :**

- Divisible par 2 ? Oui, car le chiffre des unités est 6.
- Divisible par 3 ? Somme des chiffres : $4 + 5 + 6 = 15$. 15 est un multiple de 3. Oui.
- Divisible par 5 ? Non, car le chiffre des unités n'est ni 0 ni 5.
- Divisible par 9 ? Somme des chiffres : $4 + 5 + 6 = 15$. 15 n'est pas un multiple de 9. Non.
- Divisible par 10 ? Non, car le chiffre des unités n'est pas 0.

Les diviseurs de 456 parmi la liste sont 2 et 3.

► **Pour 1980 :**

- Divisible par 2 ? Oui, car le chiffre des unités est 0.
- Divisible par 3 ? Somme des chiffres : $1 + 9 + 8 + 0 = 18$. 18 est un multiple de 3. Oui.
- Divisible par 5 ? Oui, car le chiffre des unités est 0.
- Divisible par 9 ? Somme des chiffres : $1 + 9 + 8 + 0 = 18$. 18 est un multiple de 9. Oui.
- Divisible par 10 ? Oui, car le chiffre des unités est 0.

Les diviseurs de 1980 parmi la liste sont 2, 3, 5, 9 et 10.

3.3 Nombres premiers et décomposition en facteurs premiers

Définition

Nombre premier

Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

Propriété

Liste des premiers nombres premiers

Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 30 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Définition

Décomposition en facteurs premiers

Décomposer un nombre entier strictement positif en produit de facteurs premiers, c'est l'écrire sous la forme d'une multiplication de nombres premiers.

Point de méthode

Décomposer un nombre en produit de facteurs premiers

Pour décomposer un nombre en produit de facteurs premiers, on le divise successivement par les plus petits nombres premiers possibles.

Exemple : Décomposition en facteurs premiers

Énoncé : Décomposer 84 en produit de facteurs premiers.

Solution :

- On commence par le plus petit nombre premier, 2 : $84 \div 2 = 42$.
- On continue avec 2 : $42 \div 2 = 21$.
- 21 n'est pas divisible par 2. On passe au nombre premier suivant, 3 : $21 \div 3 = 7$.
- 7 est un nombre premier. On divise par 7 : $7 \div 7 = 1$.

La décomposition de 84 en produit de facteurs premiers est $2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7$.

Point de méthode

Simplifier une fraction à l'aide de la décomposition en facteurs premiers

Pour simplifier une fraction, on décompose le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers, puis on supprime les facteurs communs.

Exemple : Simplifier une fraction

Énoncé : Utiliser la décomposition en produit de facteurs premiers pour simplifier $\frac{153}{85}$.

Solution :

- step 1. **Décomposer le numérateur (153) :** $153 \div 3 = 51$ (somme des chiffres $1 + 5 + 3 = 9$, divisible par 3) $51 \div 3 = 17$ 17 est un nombre premier. Donc, $153 = 3 \times 3 \times 17 = 3^2 \times 17$.
- step 2. **Décomposer le dénominateur (85) :** 85 n'est pas divisible par 2, 3. Il est divisible par 5. $85 \div 5 = 17$ 17 est un nombre premier. Donc, $85 = 5 \times 17$.
- step 3. **Simplifier la fraction :** $\frac{153}{85} = \frac{3 \times 3 \times 17}{5 \times 17}$ On peut supprimer le facteur commun 17 : $\frac{153}{85} = \frac{3 \times 3}{5} = \frac{9}{5}$.

3.4 Problèmes avec multiples et diviseurs

Ces notions sont très utiles pour résoudre des problèmes de répartition, de groupement ou de recherche du plus grand nombre possible d'éléments.

Exemple : Problème de répartition

Énoncé : Un garçon de café doit répartir 36 croissants et 24 pains au chocolat dans des corbeilles. Chaque corbeille doit avoir le même contenu. Quelles sont les répartitions possibles ?

Solution :

- step 1. **Identifier la problématique :** On cherche un nombre de corbeilles tel que ce nombre soit un diviseur commun de 36 et de 24.
- step 2. **Lister les diviseurs de 36 :** 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.
- step 3. **Lister les diviseurs de 24 :** 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.
- step 4. **Trouver les diviseurs communs :** 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Les répartitions possibles correspondent aux nombres de corbeilles qui sont des diviseurs communs de 36 et 24. Il peut faire :

- 1 corbeille avec 36 croissants et 24 pains au chocolat.
- 2 corbeilles avec 18 croissants et 12 pains au chocolat dans chaque.
- 3 corbeilles avec 12 croissants et 8 pains au chocolat dans chaque.
- 4 corbeilles avec 9 croissants et 6 pains au chocolat dans chaque.
- 6 corbeilles avec 6 croissants et 4 pains au chocolat dans chaque.
- 12 corbeilles avec 3 croissants et 2 pains au chocolat dans chaque.

Exemple : Problème d'étagères

Énoncé : Un bibliothécaire doit répartir 420 livres sur des étagères. Chaque étagère doit contenir le même nombre de livres.

- a) Est-ce possible avec 18 étagères ?
- b) Avec 21 étagères ?

Solution :

- a) On doit savoir si 420 est divisible par 18. $420 \div 18 = 23,33\dots$ (le reste n'est pas nul). Donc, ce n'est pas possible de répartir équitablement 420 livres sur 18 étagères.
- b) On doit savoir si 420 est divisible par 21. $420 \div 21 = 20$ (reste 0). Oui, c'est possible avec 21 étagères. Chaque étagère contiendra 20 livres.

4 Utiliser le calcul littéral

4.1 Simplification d'expressions littérales

Définition

Expression littérale

Une expression littérale est une expression mathématique qui contient des lettres représentant des nombres.

Propriété

Conventions d'écriture

Pour simplifier l'écriture des expressions littérales :

- ◇ Le signe $\times$ peut être omis entre un nombre et une lettre, ou entre deux lettres.
- ◇ $a \times 2$ ou $2 \times a$ s'écrit $2a$.
- ◇ $a \times b$ s'écrit ab .
- ◇ $a \times a$ s'écrit a^2 (se lit "a au carré").
- ◇ $a \times a \times a$ s'écrit a^3 (se lit "a au cube").

Exemple : Simplifier des expressions

Énoncé : Simplifier l'écriture des expressions suivantes : $5 \times a + 3 \times b$; $x \times y$; $2 \times l + 2 \times L$; $2 \times \pi \times r$; $\pi \times r \times r$; $c \times c \times c$; $3, 2 \times x \times 3 \times x$.

Solution :

- ▶ $5 \times a + 3 \times b = 5a + 3b$
- ▶ $x \times y = xy$
- ▶ $2 \times l + 2 \times L = 2l + 2L$ (périmètre d'un rectangle)
- ▶ $2 \times \pi \times r = 2\pi r$ (périmètre d'un cercle)
- ▶ $\pi \times r \times r = \pi r^2$ (aire d'un disque)
- ▶ $c \times c \times c = c^3$ (volume d'un cube)
- ▶ $3, 2 \times x \times 3 \times x = (3, 2 \times 3) \times (x \times x) = 9, 6x^2$

Propriété

Distributivité simple

La distributivité simple permet de développer ou de factoriser une expression. Pour tous nombres a , b et k :

- ◇ $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$
- ◇ $k \times (a - b) = k \times a - k \times b$

Réduire une expression littérale de la forme $ax + bx$ consiste à la factoriser par x .

Exemple : Réduire des expressions

Énoncé : Réduire les expressions suivantes : $5, 2x + 3, 4x$; $2, 4x - 2, 1x$.

Solution :

- ▶ $5, 2x + 3, 4x = (5, 2 + 3, 4)x = 8, 6x$
- ▶ $2, 4x - 2, 1x = (2, 4 - 2, 1)x = 0, 3x$

4.2 Élaborer et traduire des expressions littérales

Point de méthode

Traduire un programme de calcul en expression littérale

Pour traduire un programme de calcul en expression littérale, on remplace le nombre de départ par une lettre (souvent x) et on applique les opérations dans l'ordre, en utilisant des parenthèses si nécessaire.

Exemple : Traduire un programme de calcul

Énoncé : Exprimer en fonction du nombre initial le programme de calcul suivant : « Choisir un nombre ; lui ajouter 2 ; multiplier le résultat par 3 ; enlever 6 ».

Solution :

step 1. Choisir un nombre : x

step 2. Lui ajouter 2 : $x + 2$

step 3. Multiplier le résultat par 3 : $3 \times (x + 2)$ (les parenthèses sont essentielles)

step 4. Enlever 6 : $3(x + 2) - 6$

L'expression littérale est $3(x + 2) - 6$. On peut même la réduire : $3x + 6 - 6 = 3x$.

Propriété

Exprimer des propriétés générales avec une lettre

Une lettre peut être utilisée pour exprimer des propriétés qui sont vraies pour tous les nombres.

Exemple : Nombres consécutifs, pairs, impairs, multiples

Énoncé :

- a) Exprimer de façon littérale l'entier qui suit un entier n , ou l'entier qui le précède.
- b) Écrire la forme générale d'un multiple de 3, des nombres entiers naturels pairs et impairs.

Solution :

- a) Si n est un entier : L'entier qui suit n est $n + 1$. L'entier qui précède n est $n - 1$.
- b) Si k est un entier : Un multiple de 3 s'écrit $3k$. Un nombre pair s'écrit $2k$. Un nombre impair s'écrit $2k + 1$ ou $2k - 1$.

4.3 Démontrer des propriétés générales

Point de méthode

Démontrer une propriété générale

Pour démontrer une propriété générale à l'aide d'une lettre, on exprime les quantités en jeu à l'aide de cette lettre, puis on effectue les calculs pour prouver la propriété.

Exemple : Somme d'entiers consécutifs

Énoncé :

- a) Démontrer que la somme de deux entiers consécutifs est impaire.
- b) Démontrer que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.

Solution :

- a) Soit n un entier. Le premier entier est n . L'entier consécutif suivant est $n + 1$. Leur somme est $S = n + (n + 1) = 2n + 1$. Comme n est un entier, $2n$ est un nombre pair. Un nombre pair plus 1 est toujours un nombre impair. Donc, la somme de deux entiers consécutifs est impaire.
- b) Soit n un entier. Les trois entiers consécutifs sont n , $n + 1$, et $n + 2$. Leur somme est $S = n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3$. On peut factoriser par 3 : $S = 3(n + 1)$. Comme $n + 1$ est un entier, $3(n + 1)$ est un multiple de 3. Donc, la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.

4.4 Substitution et tests numériques

Point de méthode

Calculer la valeur d'une expression littérale

Pour calculer la valeur d'une expression littérale, on substitue la lettre par sa valeur numérique donnée et on effectue les calculs en respectant les priorités opératoires.

Exemple : Calculer la valeur d'une expression

Énoncé : Calculer mentalement $7a + 17$ pour $a = 8$. Calculer mentalement $3x + 5y$ pour $x = 2$ et $y = 1$.

Solution :

- Pour $7a + 17$ avec $a = 8$: $7 \times 8 + 17 = 56 + 17 = 73$.
- Pour $3x + 5y$ avec $x = 2$ et $y = 1$: $3 \times 2 + 5 \times 1 = 6 + 5 = 11$.

Point de méthode

Tester une égalité

Pour tester si une égalité est vraie pour des valeurs numériques données, on calcule la valeur de chaque membre de l'égalité séparément. Si les deux résultats sont égaux, l'égalité est vraie pour ces valeurs ; sinon, elle est fausse.

Exemple : Tester une égalité

Énoncé : Faire un test numérique pour montrer que les expressions $4 + 3x$ et $7x$ ne sont pas égales.

Solution : Prenons une valeur simple pour x , par exemple $x = 2$.

step 1. **Calculer le premier membre :** $4 + 3x = 4 + 3 \times 2 = 4 + 6 = 10$.

step 2. **Calculer le second membre :** $7x = 7 \times 2 = 14$.

Puisque $10 \neq 14$, les expressions $4 + 3x$ et $7x$ ne sont pas égales. Un seul contre-exemple suffit pour prouver que deux expressions ne sont pas égales en général.

Remarque pédagogique : Vérification avec la calculatrice

La calculatrice est un outil précieux pour vérifier les calculs et les tests numériques.