

Recueil d'exercices de réflexion

Classe de 5^e - Nombres et Calculs

Introduction

Ce recueil d'exercices est conçu pour stimuler votre esprit de raisonnement et développer votre autonomie en mathématiques. Les problèmes présentés ici ne sont pas de simples applications directes de formules, mais des situations ouvertes qui nécessitent une prise d'initiative, une analyse approfondie et parfois la mobilisation de plusieurs notions. Prenez le temps de bien comprendre chaque énoncé, d'explorer différentes pistes et d'argumenter vos démarches. Il n'y a pas toujours une unique bonne réponse ou une seule méthode. L'objectif est de vous faire réfléchir et de construire votre propre compréhension.

La persévérance est la clé de la réussite en mathématiques.

I. Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes

1. Nombres décimaux, fractions, pourcentages et opposés

Exercice 1 : La part du gâteau

Trois amis, Amélie, Benjamin et Chloé, se partagent un gâteau. Amélie prend $\frac{1}{3}$ du gâteau. Benjamin prend 25% du gâteau. Chloé affirme qu'elle a pris le reste du gâteau, et que sa part est équivalente à 0,4 du gâteau total.

- Est-il possible que Chloé ait raison ? Justifiez votre réponse en détaillant les calculs nécessaires.
- Si Chloé avait raison, exprimez la part de chacun sous forme de fraction irréductible et sous forme décimale.
- Imaginez une autre répartition du gâteau entre les trois amis de sorte que les parts soient différentes et qu'Amélie ait la plus grande part et Benjamin la plus petite. Décrivez cette répartition en utilisant des pourcentages, des fractions et des nombres décimaux.

Exercice 2 : Températures extrêmes

Dans une ville imaginaire, les températures peuvent varier considérablement. Le tableau ci-dessous indique les relevés de température à midi sur une semaine.

Jour	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche
Température ($^{\circ}\text{C}$)	3,5	-2	-0,5	1,75	-4,25	6,2	-1

- Représentez ces températures sur une droite graduée. Choisissez une échelle pertinente.
- Quel jour la température a-t-elle été la plus basse ? La plus élevée ? Expliquez votre raisonnement.
- Déterminez l'opposé de chaque température. Que représente l'opposé d'une température dans ce contexte ?
- La température ressentie est parfois l'opposé de la température réelle. Le mercredi, si la température ressentie était l'opposé de la température réelle, laquelle des deux était la plus éloignée de 0°C ?
- Un matin, la température était de $-7,3^{\circ}\text{C}$. Dans l'après-midi, elle a augmenté de $10,5^{\circ}\text{C}$. Quelle était la température l'après-midi ?

2. Comparaison et ordre de nombres

Exercice 3 : Course cycliste

Quatre cyclistes ont réalisé les temps suivants sur une étape de montagne, exprimés en heures :

- Cycliste A : $\frac{17}{4}$ heures
- Cycliste B : 4,3 heures
- Cycliste C : $\frac{43}{10}$ heures
- Cycliste D : $4 + \frac{1}{5}$ heures

- Convertissez tous les temps dans la même unité (heures et minutes, ou heures décimales) pour pouvoir les comparer facilement.
- Rangez les cyclistes par ordre croissant de leurs temps. Qui a gagné l'étape ?
- Un cinquième cycliste, E, a terminé l'étape avec un temps T_E tel que $4,2 < T_E < 4,25$. Peut-il avoir battu le cycliste B ? Justifiez.
- Proposez une fraction irréductible qui représente le temps du cycliste B. Expliquez votre démarche.

Exercice 4 : Encadrement de fractions

On vous demande d'encadrer les fractions suivantes par deux nombres entiers consécutifs :

— $\frac{23}{7}$

— $-\frac{17}{5}$

— $\frac{50}{9}$

Expliquez votre méthode pour chaque encadrement. Quelle est la logique derrière le choix de ces entiers ?

II. Pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté

1. Enchaînements d'opérations et priorités

Exercice 5 : Le défi des expressions

On vous propose les expressions suivantes :

— $A = 15 - (4 + 2 \times 3)$

— $B = 7,5 + 2,5 \times (10 - 4 \div 2)$

— $C = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times (\frac{3}{5} - \frac{1}{10})$

- Sans effectuer les calculs, décrivez l'ordre dans lequel vous effectueriez les opérations pour chaque expression. Justifiez votre choix en citant les règles de priorité.
- Calculez la valeur exacte de chaque expression en détaillant toutes les étapes.
- Proposez une expression avec des parenthèses dont le résultat serait 100 en utilisant les nombres 2, 3, 4 et 5 une seule fois chacun, et les quatre opérations (+, -, ×, ÷).

Exercice 6 : Vraisemblance et erreurs

Un élève a effectué les calculs suivants et a obtenu les résultats donnés. Sans refaire tous les calculs exacts, dites si les résultats sont vraisemblables ou non, et justifiez votre réponse en utilisant des arguments basés sur l'ordre de grandeur, les priorités opératoires ou les signes des nombres.

- $25,8 \times 0,9 \approx 230,22$
- $-12 + (-5) \times 3 = -21$
- $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$
- $(15 - 3) \div 0,2 = 2,4$

2. Problèmes avec nombres décimaux relatifs et fractions

Exercice 7 : Budget familial

Une famille dispose d'un budget mensuel de 2800 €. Ils consacrent $\frac{2}{7}$ de leur budget au logement. Ils allouent 35% de leur budget aux dépenses alimentaires. Les transports représentent $\frac{1}{8}$ du budget. Le reste est consacré aux loisirs et à l'épargne.

- Calculez le montant dépensé pour le logement, l'alimentation et les transports. Exprimez chaque montant sous forme décimale.
- Quelle fraction du budget total représente la somme des dépenses de logement, alimentation et transports ?
- Quel est le montant restant pour les loisirs et l'épargne ?
- La famille souhaite économiser au moins $\frac{1}{10}$ de son budget mensuel. Est-ce qu'ils atteignent cet objectif avec la répartition actuelle ? Si non, proposez une modification de leurs dépenses (logement, alimentation, transports, loisirs/épargne) pour y parvenir.

III. Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers

1. Division euclidienne, multiples et diviseurs

Exercice 8 : L'organisateur de perles

Un bijoutier a 345 perles rouges, 230 perles bleues et 115 perles vertes. Il souhaite créer des colliers identiques, chacun contenant le même nombre de perles de chaque couleur. Il veut utiliser toutes les perles.

- Quel est le nombre maximum de colliers identiques qu'il peut créer ? Justifiez votre réponse en expliquant la notion mathématique utilisée.
- Combien de perles de chaque couleur y aura-t-il dans chaque collier ?
- Si le bijoutier décide de créer des colliers avec 5 perles rouges, 3 perles bleues et 2 perles vertes, combien de colliers pourra-t-il faire au maximum ? Combien de perles de chaque couleur lui restera-t-il ?

Exercice 9 : Les carreaux de la salle de bain

Une salle de bain rectangulaire mesure 360 cm de long et 270 cm de large. On veut la carrelé avec des carreaux carrés identiques, sans découpe.

- Quelles sont toutes les tailles possibles pour les carreaux (longueur du côté d'un carreau, en cm) ?
- Quelle est la plus grande taille possible pour les carreaux ? Combien de carreaux de cette taille faudra-t-il pour carrelé toute la salle de bain ?
- Si l'on choisit des carreaux de 30 cm de côté, combien de carreaux seront nécessaires ?

2. Nombres premiers et décomposition

Exercice 10 : Simplification astucieuse

On vous donne la fraction $\frac{168}{252}$.

- Décomposez les nombres 168 et 252 en produits de facteurs premiers.
- Utilisez ces décompositions pour simplifier la fraction $\frac{168}{252}$ et la rendre irréductible. Expliquez chaque étape de la simplification.
- Pouvez-vous trouver une autre fraction irréductible qui soit égale à un nombre décimal et qui ait un dénominateur différent de 10, 100, etc. ? Expliquez.

Exercice 11 : Le code secret

Un cadenas à trois chiffres utilise un code secret lié aux nombres premiers. Le premier chiffre est le plus grand nombre premier inférieur à 10. Le deuxième chiffre est le résultat de la division euclidienne de 47 par 5. Le troisième chiffre est le nombre de diviseurs du premier chiffre.

- Trouvez les trois chiffres du code secret.
- Si le code était un nombre à trois chiffres formés par la concaténation de ces trois chiffres, serait-il divisible par 2, 3, 5, 9 ou 10 ? Justifiez.
- Inventez un code secret similaire à trois chiffres basé sur des propriétés des nombres premiers, des multiples ou des diviseurs. Expliquez les règles de votre code.

IV. Utiliser le calcul littéral

1. Expressions littérales et programmes de calcul

Exercice 12 : La formule du périmètre

Considérez un rectangle dont la longueur est L et la largeur est l .

- Exprimez le périmètre P de ce rectangle en fonction de L et l . Simplifiez l'écriture de cette expression.
- Si la longueur L est le double de la largeur l , exprimez le périmètre P uniquement en fonction de l .
- Testez votre formule de la question b) avec une largeur $l = 5$ cm. Quel est le périmètre ?
- Imaginez une figure géométrique dont le périmètre pourrait être représenté par l'expression $3x + 5y$. Décrivez cette figure et ses dimensions.

Exercice 13 : Le mystérieux programme de calcul

On propose le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre
 - Lui soustraire 5
 - Multiplier le résultat par 3
 - Ajouter 15 au nouveau résultat
- Appliquez ce programme au nombre 7. Quel résultat obtenez-vous ?
 - Appliquez ce programme au nombre -2 . Quel résultat obtenez-vous ?
 - On note x le nombre choisi au départ. Exprimez le résultat final de ce programme de calcul en fonction de x .
 - Simplifiez l'expression littérale que vous avez trouvée. Que remarquez-vous ?
 - Pouvez-vous expliquer pourquoi ce programme de calcul donne toujours ce résultat particulier ?

2. Propriétés générales et démonstrations

Exercice 14 : Somme d'entiers consécutifs

- Choisissez trois entiers consécutifs (par exemple, 4, 5, 6). Calculez leur somme. Est-ce un multiple de 3 ?
- Répétez l'expérience avec un autre groupe de trois entiers consécutifs. Est-ce encore un multiple de 3 ?
- En notant n le premier entier d'un groupe de trois entiers consécutifs, exprimez les deux entiers suivants en fonction de n .
- Démontrez que la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3.
- La somme de deux entiers consécutifs est-elle toujours paire ou impaire ? Démontrez votre affirmation.

Exercice 15 : Vrai ou Faux ?

Pour chaque affirmation ci-dessous, indiquez si elle est vraie ou fausse. Si elle est fausse, donnez un contre-exemple et expliquez pourquoi.

- L'expression $2x + 3x$ est toujours égale à $5x$.

- b) L'expression $3x - x$ est toujours égale à 3.
- c) Pour n'importe quelle valeur de y , l'expression $4y + 2$ est un nombre pair.
- d) Si on remplace a par 5 et b par 2 dans l'expression $a^2 - b^2$, on obtient le même résultat que si on remplace a par 5 et b par 2 dans l'expression $(a - b)(a + b)$.