

5^e Mathématiques

Grandeurs et Mesures

Polycopié de cours

Année scolaire 2024-2025

Table des matières

1	Introduction aux grandeurs mesurables	2
1.1	Qu'est-ce qu'une grandeur mesurable ?	2
2	Calculs de durées et d'horaires	2
2.1	Conversion d'unités de temps	2
2.2	Opérations sur les durées	2
2.2.1	Exemple commenté : Calcul de durée de trajet	2
3	Périmètre et Aire des figures usuelles	3
3.1	Unités d'aire et de longueur	3
3.2	Formules de calcul	3
3.3	Calcul de périmètre et d'aire d'un assemblage de figures	4
3.3.1	Exemple commenté : Aire et périmètre d'une figure composite	4
4	Volumes des solides usuels	5
4.1	Unités de volume et de contenance	5
4.2	Formules de calcul des volumes	5
4.3	Calcul de volume d'un assemblage de solides	5
4.3.1	Exemple commenté : Volume d'un solide composite	5
5	Conversions d'unités	6
5.1	Tableaux de conversion	6
5.1.1	Exemple commenté : Conversions d'unités	6
5.2	Vérification de la cohérence des unités	8
5.2.1	Exemple commenté : Identification d'erreur d'unité	8

1 Introduction aux grandeurs mesurables

1.1 Qu'est-ce qu'une grandeur mesurable ?

Définition

Une **grandeur mesurable** est une caractéristique d'un objet ou d'un phénomène que l'on peut mesurer, c'est-à-dire lui associer une valeur numérique à l'aide d'une unité de mesure. Exemples : la longueur, la masse, le temps, l'aire, le volume.

Remarque pédagogique : Il est essentiel de distinguer la grandeur elle-même (ex : la longueur) de sa mesure (ex : 5 mètres) et de l'unité (ex : le mètre).

2 Calculs de durées et d'horaires

2.1 Conversion d'unités de temps

Point de méthode

Pour effectuer des calculs de durées ou d'horaires, il est souvent nécessaire de convertir les unités de temps. Rappelez-vous les équivalences de base :

- 1 minute (min) = 60 secondes (s)
- 1 heure (h) = 60 minutes (min)
- 1 jour = 24 heures (h)

2.2 Opérations sur les durées

Point de méthode

Pour additionner ou soustraire des durées :

1. Alignez les heures avec les heures, les minutes avec les minutes, les secondes avec les secondes.
2. Effectuez l'opération colonne par colonne en commençant par les secondes.
3. Si une colonne dépasse 60 (pour les minutes ou les secondes), convertissez l'excédent dans l'unité supérieure (ex : 70 secondes = 1 minute et 10 secondes).
4. Si une colonne est négative lors d'une soustraction, "empruntez" une unité à la colonne supérieure (ex : 1 heure = 60 minutes).

2.2.1 Exemple commenté : Calcul de durée de trajet

Énoncé : Un train part de la gare à 8h45 et arrive à destination à 11h10. Quelle est la durée du trajet ?

Solution commentée étape par étape :

1. On soustrait l'heure de départ à l'heure d'arrivée.
2. On pose l'opération :

$$\begin{array}{r} 11 \text{ h } 10 \text{ min} \\ - 8 \text{ h } 45 \text{ min} \\ \hline \end{array}$$

3. On soustrait les minutes : $10 - 45$. Ce n'est pas possible car 10 est plus petit que 45.
4. On "emprunte" une heure (soit 60 minutes) aux heures : 11h deviennent 10h, et 10min deviennent $10 + 60 = 70$ min.

$$\begin{array}{r}
 10 \text{ h } 70 \text{ min} \\
 - 8 \text{ h } 45 \text{ min} \\
 \hline
 \end{array}$$

5. On effectue la soustraction des minutes : $70 - 45 = 25$ minutes.

6. On effectue la soustraction des heures : $10 - 8 = 2$ heures.

7. **Résultat** : La durée du trajet est de 2 heures et 25 minutes.

Remarque pédagogique : Insistez sur le concept d'emprunt et de retenue qui est différent du système décimal classique.

3 Périmètre et Aire des figures usuelles

3.1 Unités d'aire et de longueur

Propriété

Le **périmètre** est la longueur du contour d'une figure plane. Il s'exprime en unités de longueur (m, cm, km, etc.).

Propriété

L'**aire** est la mesure de la surface occupée par une figure plane. Elle s'exprime en unités d'aire (m^2 , cm^2 , km^2 , etc.).

Remarque pédagogique : Il est crucial que les élèves comprennent la différence fondamentale entre ces deux notions, ainsi que leurs unités respectives. Une erreur fréquente est d'utiliser des cm^2 pour un périmètre ou des cm pour une aire.

3.2 Formules de calcul

Propriété

Formules de Périmètre et Aire des figures usuelles

- **Carré de côté c** :
 - Périmètre $P = 4 \times c$
 - Aire $A = c \times c = c^2$
- **Rectangle de longueur L et largeur l** :
 - Périmètre $P = 2 \times (L + l)$
 - Aire $A = L \times l$
- **Triangle de base b et hauteur h (relative à la base b)** :
 - Aire $A = \frac{b \times h}{2}$
 - Le périmètre est la somme des longueurs des trois côtés.
- **Parallélogramme de base b et hauteur h (relative à la base b)** :
 - Aire $A = b \times h$
 - Le périmètre est $2 \times (ct_1 + ct_2)$, où ct_1 et ct_2 sont les longueurs des côtés adjacents.
- **Disque de rayon r** :
 - Périmètre (Circonférence) $P = 2 \times \pi \times r$
 - Aire $A = \pi \times r^2$

3.3 Calcul de périmètre et d'aire d'un assemblage de figures

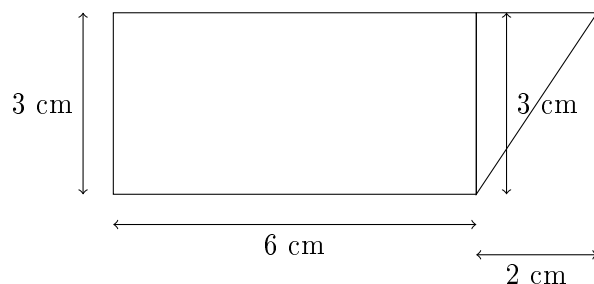
Point de méthode

Pour calculer le périmètre ou l'aire d'un assemblage de figures :

1. **Découpez** la figure complexe en figures usuelles dont vous connaissez les formules de périmètre et d'aire.
2. **Identifiez** les longueurs et les surfaces pertinentes pour chaque partie.
3. **Pour l'aire : Additionnez ou soustrayez** les aires des figures simples pour obtenir l'aire totale.
4. **Pour le périmètre : Identifiez le contour extérieur** de la figure. Ne tenez pas compte des segments intérieurs qui ne font pas partie du contour. Additionnez les longueurs des segments du contour.

3.3.1 Exemple commenté : Aire et périmètre d'une figure composite

Énoncé : Calcule le périmètre et l'aire de la figure ci-dessous (composée d'un rectangle et d'un triangle rectangle).



Dimensions de l'exemple :

- Rectangle : Longueur $L = 6$ cm, largeur $l = 3$ cm.
- Triangle rectangle : Base $b = 2$ cm (extension horizontale depuis le rectangle), hauteur $h = 3$ cm (côté du rectangle).
- Hypoténuse du triangle : Calculons sa longueur avec le théorème de Pythagore : $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \approx 3,61$ cm.

Solution commentée étape par étape :

1. Calcul de l'aire :

- Aire du rectangle : $A_{rectangle} = L \times l = 6 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 18 \text{ cm}^2$.
- Aire du triangle rectangle : $A_{triangle} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{2 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}}{2} = \frac{6}{2} \text{ cm}^2 = 3 \text{ cm}^2$.
- Aire totale : $A_{totale} = A_{rectangle} + A_{triangle} = 18 \text{ cm}^2 + 3 \text{ cm}^2 = 21 \text{ cm}^2$.

2. Calcul du périmètre :

- Le périmètre est la somme des longueurs des côtés **extérieurs** de la figure. Les côtés intérieurs (le côté vertical de 3 cm commun entre le rectangle et le triangle) ne sont pas inclus.
- Les côtés extérieurs sont :
 - Le côté du bas du rectangle : 6 cm.
 - Le côté gauche du rectangle : 3 cm.
 - Le côté du haut du rectangle : 6 cm.
 - Le côté horizontal du triangle (la base) : 2 cm.
 - L'hypoténuse du triangle : $\sqrt{13} \approx 3,61$ cm.
- Périmètre $P = 6 + 3 + 6 + 2 + \sqrt{13} \approx 6 + 3 + 6 + 2 + 3,61 = 20,61$ cm.

Remarque pédagogique : Insister sur le fait que le périmètre est le "tour" de la figure. Les segments de division internes ne sont pas comptés.

4 Volumes des solides usuels

4.1 Unités de volume et de contenance

Propriété

Le **volume** est la mesure de l'espace occupé par un objet. Il s'exprime en unités de volume (m^3 , cm^3 , dm^3 , etc.).

Propriété

La **contenance** (ou capacité) est la quantité de liquide ou de gaz qu'un récipient peut contenir. Elle s'exprime en unités de contenance (L, cL, mL, etc.).

Propriété

Correspondances fondamentales entre volume et contenance

- $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$
- $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}$
- $1 \text{ cL} = 10 \text{ cm}^3$ (car $1 \text{ L} = 100 \text{ cL}$ et $1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$, donc $1000 \text{ cm}^3 = 100 \text{ cL} \implies 10 \text{ cm}^3 = 1 \text{ cL}$)

Remarque pédagogique : Ces correspondances sont cruciales et doivent être mémorisées. Utilisez des exemples concrets (brique de lait, aquarium) pour illustrer.

4.2 Formules de calcul des volumes

Propriété

Formules de Volume des solides usuels

- **Pavé droit (parallélépipède rectangle)** de longueur L , largeur l et hauteur h :
 - Volume $V = L \times l \times h$
- **Cube de côté c :**
 - Volume $V = c \times c \times c = c^3$
- **Prisme droit d'aire de base A_{base} et de hauteur h :**
 - Volume $V = A_{\text{base}} \times h$
- **Cylindre de rayon de base r et de hauteur h :**
 - Volume $V = \pi \times r^2 \times h$
 - (C'est un cas particulier de prisme droit où la base est un disque)

4.3 Calcul de volume d'un assemblage de solides

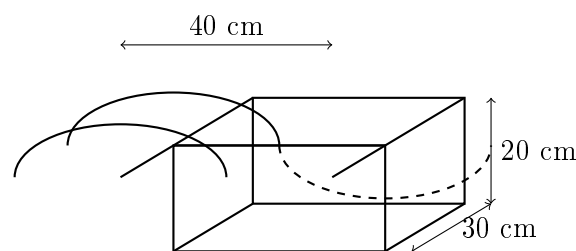
Point de méthode

Pour calculer le volume d'un assemblage de solides :

1. **Décomposez** le solide complexe en solides usuels dont vous connaissez les formules de volume.
2. **Calculez** le volume de chaque solide simple.
3. **Additionnez ou soustrayez** les volumes des solides simples pour obtenir le volume total.

4.3.1 Exemple commenté : Volume d'un solide composite

Énoncé : Calcule le volume du solide suivant, composé d'un pavé droit surmonté d'un demi-cylindre. Le pavé droit a une base de 40 cm de longueur et 20 cm de largeur, et une hauteur de 30 cm. Le demi-cylindre a pour diamètre la longueur du pavé droit (40 cm) et pour hauteur la largeur du pavé droit (20 cm).



Dimensions pour l'exemple :

- Pavé droit : Longueur $L_{pav} = 40$ cm, largeur $l_{pav} = 20$ cm, hauteur $h_{pav} = 30$ cm.
- Demi-cylindre : Le diamètre de sa base est la longueur du pavé, soit 40 cm, donc le rayon $r = 20$ cm. La "hauteur" du demi-cylindre (qui correspond à la largeur du pavé et à l'axe du cylindre) est $h_{cyl} = 20$ cm.

Solution commentée étape par étape :

1. Calcul du volume du pavé droit :

- $V_{pav} = L_{pav} \times l_{pav} \times h_{pav}$
- $V_{pav} = 40 \text{ cm} \times 20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$
- $V_{pav} = 24000 \text{ cm}^3$

2. Calcul du volume du demi-cylindre :

- Volume d'un cylindre entier : $V_{cylindre} = \pi \times r^2 \times h_{cyl}$
- $V_{cylindre} = \pi \times (20 \text{ cm})^2 \times 20 \text{ cm}$
- $V_{cylindre} = \pi \times 400 \text{ cm}^2 \times 20 \text{ cm}$
- $V_{cylindre} = 8000\pi \text{ cm}^3$
- Volume du demi-cylindre : $V_{demi-cylindre} = \frac{V_{cylindre}}{2} = \frac{8000\pi}{2} \text{ cm}^3 = 4000\pi \text{ cm}^3$
- En utilisant $\pi \approx 3,14$, $V_{demi-cylindre} \approx 4000 \times 3,14 \text{ cm}^3 = 12560 \text{ cm}^3$.

3. Calcul du volume total :

- $V_{total} = V_{pav} + V_{demi-cylindre}$
- $V_{total} = 24000 \text{ cm}^3 + 4000\pi \text{ cm}^3$
- $V_{total} \approx 24000 \text{ cm}^3 + 12560 \text{ cm}^3 = 36560 \text{ cm}^3$.

Expression du résultat dans l'unité adaptée : Le volume du solide est environ 36560 cm^3 .

On peut aussi l'exprimer en litres : $36560 \text{ cm}^3 = 36,560 \text{ dm}^3 = 36,56 \text{ L}$.

Remarque pédagogique : Rappeler aux élèves l'importance de bien identifier les dimensions pour chaque partie du solide et de faire attention aux unités.

5 Conversions d'unités

5.1 Tableaux de conversion

Point de méthode

Pour effectuer des conversions d'unités de longueur, d'aire ou de volume, il est très utile d'utiliser des tableaux de conversion. Chaque unité est associée à une ou plusieurs colonnes.

- **Unités de longueur (m) :** Chaque unité est 10 fois plus grande que la suivante (1 colonne par unité).
- **Unités d'aire (m²) :** Chaque unité est 100 fois plus grande que la suivante (2 colonnes par unité).
- **Unités de volume (m³) :** Chaque unité est 1000 fois plus grande que la suivante (3 colonnes par unité).

5.1.1 Exemple commenté : Conversions d'unités

Énoncé : Effectue les conversions suivantes :

1. 350 000 m en km

2. $0,05 \text{ m}^2$ en cm^2
3. 12 hm^3 en dm^3
4. $2,8 \text{ h}$ en heures et minutes
5. 33 cL en cm^3
6. $1\,500 \text{ cm}^3$ en L

Solution commentée étape par étape :

1. $350\,000 \text{ m}$ en km :

- On sait que $1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$. Pour passer des mètres aux kilomètres, on divise par 1000.
- $350\,000 \div 1000 = 350$.
- Donc, $350\,000 \text{ m} = 350 \text{ km}$.

2. $0,05 \text{ m}^2$ en cm^2 :

- On utilise le tableau de conversion des aires (2 colonnes par unité) :

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
			0	5	0	0

- On place $0,05 \text{ m}^2$. Le chiffre des unités (0) est dans la colonne des unités de m^2 .
- Pour obtenir des cm^2 , on décale la virgule jusqu'à la colonne des unités de cm^2 , en ajoutant des zéros si nécessaire.
- $0,05 \text{ m}^2 = 500 \text{ cm}^2$.

3. 12 hm^3 en dm^3 :

- On utilise le tableau de conversion des volumes (3 colonnes par unité) :

km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
	1	2	0	0	0	0

- On place 12 hm^3 . Le chiffre des unités (2) est dans la colonne des unités de hm^3 .
- Pour obtenir des dm^3 , on décale la virgule (implicitement après le 2) jusqu'à la colonne des unités de dm^3 , en remplissant avec des zéros.
- $12 \text{ hm}^3 = 12\,000\,000\,000 \text{ dm}^3$.

4. $2,8 \text{ h}$ en heures et minutes :

- Le nombre d'heures est la partie entière : 2 heures.
- La partie décimale représente une fraction d'heure : $0,8 \text{ h}$.
- Pour convertir $0,8 \text{ h}$ en minutes, on multiplie par 60 : $0,8 \times 60 = 48$ minutes.
- Donc, $2,8 \text{ h} = 2 \text{ h } 48 \text{ min}$.

5. 33 cL en cm^3 :

- On sait que $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$ et $1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$.
- Aussi, $1 \text{ L} = 100 \text{ cL}$.
- Donc $100 \text{ cL} = 1000 \text{ cm}^3$.
- En divisant par 100, on obtient $1 \text{ cL} = 10 \text{ cm}^3$.
- $33 \text{ cL} = 33 \times 10 \text{ cm}^3 = 330 \text{ cm}^3$.

6. $1\,500 \text{ cm}^3$ en L :

- On sait que $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$ et $1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$.
- Donc $1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ L}$.
- Pour convertir des cm^3 en litres, on divise par 1000.
- $1500 \div 1000 = 1,5$.
- Donc, $1\,500 \text{ cm}^3 = 1,5 \text{ L}$.

5.2 Vérification de la cohérence des unités

Point de méthode

Vérifier la cohérence des unités dans un calcul :

1. Lors d'un calcul, assurez-vous que toutes les grandeurs sont exprimées dans des unités compatibles. Si ce n'est pas le cas, effectuez les conversions nécessaires avant le calcul.
2. Le résultat d'un calcul doit toujours avoir une unité adaptée. Par exemple, une aire s'exprime en unités de surface (m^2 , cm^2), et un volume en unités de volume (m^3 , cm^3).

5.2.1 Exemple commenté : Identification d'erreur d'unité

Énoncé : Identifie l'erreur commise dans cette réponse : «< Le volume d'un cube de 3 cm de côté est égal à 27 cm^2 »>

Solution commentée étape par étape :

1. **Analyse de l'énoncé :** Il s'agit du calcul d'un **volume** d'un cube.
2. **Formule du volume d'un cube :** $V = c^3$. L'unité du volume est donc le produit de trois longueurs, c'est-à-dire une unité cubique (cm^3 , m^3 , etc.).
3. **Calcul :** Pour un cube de 3 cm de côté, le volume est $V = 3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 27 \text{ cm}^3$.
4. **Identification de l'erreur :** La réponse donnée est 27 cm^2 . L'erreur est dans l'unité. 27 cm^2 est une unité d'aire, non de volume.
5. **Correction :** Le volume d'un cube de 3 cm de côté est égal à 27 cm^3 .

Remarque pédagogique : Cet exemple simple met en évidence l'importance de la cohérence des unités. Une erreur d'unité peut rendre un résultat mathématiquement correct complètement faux dans le monde réel.