

Mathématiques - 4^e

Nombres et Calculs

ExoMaths.fr

Juin 2025

Table des matières

1	Nombres et Calculs	2
1.1	Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes	2
1.1.1	Nombres	2
1.1.2	Comparaison de nombres	3
1.1.3	Pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté	4
1.2	Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers	6

1 Nombres et Calculs

Cette section couvre les attentes en fin d'année de 4^e concernant l'utilisation des nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes, ainsi que la compréhension et l'utilisation des notions de divisibilité et de nombres premiers.

1.1 Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes

1.1.1 Nombres

Un élève de 4^e doit maîtriser l'utilisation des puissances de 10, les écritures décimales, fractionnaires et scientifiques des nombres décimaux, ainsi que les préfixes de nano à giga. Il doit également connaître les carrés parfaits jusqu'à 144 et la définition de la racine carrée d'un nombre positif.

Propriété

Puissances de 10

Pour tout entier positif n , $10^n = 1 \underbrace{00 \dots 0}_{n \text{ zéros}}$.

Pour tout entier positif n , $10^{-n} = \frac{1}{10^n} = 0, \underbrace{00 \dots 0}_{n-1 \text{ zéros}} 1$.

Exemple : Correspondances avec les puissances de 10

Énoncé : Établir les correspondances suivantes.

1. $10^4 = \dots$
2. $10^{-3} = \dots$

Solution étape par étape :

1. Pour 10^4 , l'exposant est 4, donc il y a 4 zéros après le 1.
 $10^4 = 10\,000$.
2. Pour 10^{-3} , l'exposant est -3, donc il s'agit d'un nombre décimal avec le 1 en 3^e position après la virgule.
 $10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0,001$.

Point de méthode

Passer de l'écriture décimale à l'écriture scientifique

1. Déplacer la virgule pour obtenir un nombre entre 1 et 10 (non inclus). Ce nombre est a .
2. Compter le nombre de places de déplacement de la virgule. Ce nombre est n .
3. Si la virgule a été déplacée vers la gauche, l'exposant de 10 est positif (10^n).
4. Si la virgule a été déplacée vers la droite, l'exposant de 10 est négatif (10^{-n}).
5. L'écriture scientifique est de la forme $a \times 10^n$.

Exemple : Écriture scientifique

Énoncé : Établir les correspondances suivantes.

1. $390\,000\,000 = \dots$
2. $0,000783 = \dots$

Solution étape par étape :

1. Pour $390\,000\,000$:
 - Le nombre entre 1 et 10 est 3,9.
 - La virgule est déplacée de 8 places vers la gauche.
 - Donc, $390\,000\,000 = 3,9 \times 10^8$.
2. Pour $0,000783$:
 - Le nombre entre 1 et 10 est 7,83.
 - La virgule est déplacée de 4 places vers la droite.
 - Donc, $0,000783 = 7,83 \times 10^{-4}$.

Propriété

Préfixes du système international Les préfixes sont utilisés pour exprimer des multiples et sous-multiples d'unités.

- Giga (G) : 10^9
- Méga (M) : 10^6
- Kilo (k) : 10^3
- Hecto (h) : 10^2
- Déca (da) : 10^1
- Déci (d) : 10^{-1}
- Centi (c) : 10^{-2}
- Milli (m) : 10^{-3}
- Micro (μ) : 10^{-6}
- Nano (n) : 10^{-9}

Exemple : Utilisation des préfixes

Énoncé : Établir les correspondances suivantes.

1. 3 microlitres = ... litre
2. 7 mégamètres = ... mètres

Solution étape par étape :

1. "Micro" correspond à 10^{-6} . Donc, 3 microlitres = 3×10^{-6} litre.
2. "Méga" correspond à 10^6 . Donc, 7 mégamètres = 7×10^6 mètres.

Définition**Carré d'un nombre**

Le carré d'un nombre x est le produit de ce nombre par lui-même, noté x^2 .

Propriété**Carrés parfaits**

Les carrés parfaits de 1 à 144 sont les résultats des nombres entiers de 1 à 12 multipliés par eux-mêmes. $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$, $9^2 = 81$, $10^2 = 100$, $11^2 = 121$, $12^2 = 144$.

Définition**Racine carrée d'un nombre positif**

La racine carrée d'un nombre positif a , notée $\sqrt{a}$, est le nombre positif x tel que $x^2 = a$.

Exemple : Carrés et racines carrées

Énoncé : Compléter les égalités suivantes.

1. $11^2 = \dots$
2. $\sqrt{81} = \dots$
3. $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^{\dots}$

Solution étape par étape :

1. $11^2 = 11 \times 11 = 121$.
2. $\sqrt{81}$: On cherche le nombre positif qui, multiplié par lui-même, donne 81. $9 \times 9 = 81$. Donc, $\sqrt{81} = 9$.
3. L'expression $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$ représente 7 multiplié par lui-même 5 fois. Donc, $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^5$.

1.1.2 Comparaison de nombres

Un élève de 4^e doit être capable de comparer, ranger et encadrer des nombres rationnels (positifs ou négatifs), d'utiliser les puissances de 10 pour comparer des nombres et d'encadrer la racine carrée d'un nombre positif entre deux entiers. Il doit aussi être capable d'associer des ordres de grandeur à des objets en lien avec d'autres disciplines.

Point de méthode**Comparer des nombres rationnels** Pour comparer des fractions :

- Les réduire au même dénominateur si nécessaire.
- Comparer les numérateurs. La fraction avec le plus grand numérateur est la plus grande.

Pour comparer des nombres négatifs :

- Le nombre négatif le plus proche de zéro est le plus grand.

Exemple : Comparaison de nombres**Énoncé :** Compléter par $>$, $<$ ou $=$:

1. $\frac{5}{18} \dots \frac{7}{12}$
2. $\frac{5}{12} \dots \frac{4}{3}$
3. $-3 \dots -\frac{22}{7}$

Solution étape par étape :

1. Pour comparer $\frac{5}{18}$ et $\frac{7}{12}$, on cherche un dénominateur commun, par exemple 36. $\frac{5}{18} = \frac{5 \times 2}{18 \times 2} = \frac{10}{36}$
 $\frac{7}{12} = \frac{7 \times 3}{12 \times 3} = \frac{21}{36}$ Comme $10 < 21$, alors $\frac{10}{36} < \frac{21}{36}$. Donc, $\frac{5}{18} < \frac{7}{12}$.
2. Pour comparer $\frac{5}{12}$ et $\frac{4}{3}$, on cherche un dénominateur commun, par exemple 12. $\frac{4}{3} = \frac{4 \times 4}{3 \times 4} = \frac{16}{12}$
Comme $5 < 16$, alors $\frac{5}{12} < \frac{16}{12}$. Donc, $\frac{5}{12} < \frac{4}{3}$.
3. Pour comparer -3 et $-\frac{22}{7}$, on peut convertir -3 en fraction avec un dénominateur 7 ou calculer la valeur décimale de $-\frac{22}{7}$. $-3 = -\frac{21}{7}$ $-\frac{22}{7} \approx -3,14$ Comme $-21 > -22$, alors $-\frac{21}{7} > -\frac{22}{7}$. Donc, $-3 > -\frac{22}{7}$.

Point de méthode**Encadrer la racine carrée d'un nombre positif entre deux entiers consécutifs** Pour encadrer $\sqrt{a}$ entre deux entiers consécutifs, on cherche deux carrés parfaits consécutifs n^2 et $(n+1)^2$ tels que $n^2 < a < (n+1)^2$. Alors, $n < \sqrt{a} < n+1$.**Exemple : Encadrement de racine carrée****Énoncé :** Encadrer $\sqrt{7}$ entre deux entiers consécutifs sans en chercher une valeur approchée.**Solution étape par étape :**

- On cherche les carrés parfaits autour de 7.
- $2^2 = 4$
- $3^2 = 9$
- On a $4 < 7 < 9$.
- Donc, $\sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9}$.
- Cela signifie $2 < \sqrt{7} < 3$.

Remarque pédagogique :

L'association d'ordres de grandeur permet de développer le sens du nombre et la capacité d'estimation, ce qui est crucial pour vérifier la vraisemblance des résultats obtenus.

1.1.3 Pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté

L'élève doit être capable d'effectuer des produits et quotients avec des nombres décimaux relatifs, de calculer avec des nombres rationnels (addition, soustraction, multiplication, division), et d'utiliser l'inverse pour calculer. Il doit savoir résoudre des problèmes avec des nombres rationnels, utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée de la racine carrée et utiliser la racine carrée dans des situations géométriques (Théorème de Pythagore, agrandissement, réduction, aires). Enfin, il doit utiliser les ordres de grandeur pour vérifier ses résultats.

Point de méthode**Règles de signe pour la multiplication et la division**

- Produit ou quotient de deux nombres de même signe : le résultat est positif.
- Produit ou quotient de deux nombres de signes différents : le résultat est négatif.

Exemple : Calcul mental avec des nombres décimaux relatifs

Énoncé : Calculer mentalement :

1. -7×3
2. $-2,5 \times (-4)$
3. $2,4 : (-0,5)$
4. $-12,8 : 2$
5. $-63 : (-0,7)$
6. $7,2 : (-5)$

Solution étape par étape :

1. $-7 \times 3 = -21$ (signes différents, résultat négatif)
2. $-2,5 \times (-4) = 10$ (mêmes signes, résultat positif)
3. $2,4 : (-0,5) = -4,8$ (signes différents, résultat négatif; diviser par 0,5 revient à multiplier par 2)
4. $-12,8 : 2 = -6,4$ (signes différents, résultat négatif)
5. $-63 : (-0,7) = 90$ (mêmes signes, résultat positif; $630 : 7 = 90$)
6. $7,2 : (-5) = -1,44$ (signes différents, résultat négatif)

Point de méthode

Déterminer le signe d'un produit ou d'un quotient de plusieurs nombres

- Compter le nombre de facteurs négatifs.
- Si le nombre de facteurs négatifs est pair, le résultat est positif.
- Si le nombre de facteurs négatifs est impair, le résultat est négatif.

Exemple : Signe d'un produit et d'un quotient

Énoncé : Déterminer le signe de :

1. $(-6,7) \times 7 \times (-1,24) \times (-0,7)$
2. $\frac{11,4 \times (-3,5)}{-(5,6 \times 123)}$

Solution étape par étape :

1. Pour $(-6,7) \times 7 \times (-1,24) \times (-0,7)$: Il y a 3 facteurs négatifs (impair). Le signe du produit est donc négatif.
2. Pour $\frac{11,4 \times (-3,5)}{-(5,6 \times 123)}$: Numérateur : un facteur négatif (11,4 est positif, -3,5 est négatif), donc le numérateur est négatif. Dénominateur : 5,6 et 123 sont positifs, donc $5,6 \times 123$ est positif. Le signe "—" devant rend le dénominateur négatif. On a un numérateur négatif et un dénominateur négatif. Le quotient de deux nombres de même signe est positif. Le signe du quotient est donc positif.

Point de méthode

Calculer avec des nombres rationnels (fractions)

- **Addition/Soustraction** : Mettre les fractions au même dénominateur, puis additionner/soustraire les numérateurs.
- **Multiplication** : Multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$.
- **Division** : Multiplier la première fraction par l'inverse de la seconde. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

Exemple : Calcul mental avec des fractions

Énoncé : Calculer mentalement :

1. $\frac{5}{2} \times \frac{-7}{3}$
2. $-7 \times \frac{8}{5}$
3. $-\frac{3}{7} \times \frac{14}{-5}$
4. $\frac{5}{9} : \frac{1}{2}$

Solution étape par étape :

- $\frac{5}{2} \times \frac{-7}{3} = \frac{5 \times (-7)}{2 \times 3} = \frac{-35}{6}$.
- $-7 \times \frac{8}{5} = \frac{-7}{1} \times \frac{8}{5} = \frac{-7 \times 8}{1 \times 5} = \frac{-56}{5}$.
- $-\frac{3}{7} \times \frac{14}{-5} = \frac{-3 \times 14}{7 \times (-5)} = \frac{-42}{-35} = \frac{42}{35} = \frac{6}{5}$ (simplification par 7).
- $\frac{5}{9} : \frac{1}{2} = \frac{5}{9} \times \frac{2}{1} = \frac{5 \times 2}{9 \times 1} = \frac{10}{9}$.

Exemple : Calcul à la main avec des fractions**Énoncé :** Calculer à la main :

- $\frac{5}{3} - 6 \times \frac{1}{5}$
- $\frac{7}{6} - \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{3}\right)$
- $\frac{-7}{4} + \frac{1}{9} : 4$

Solution étape par étape :

- Priorité aux multiplications : $\frac{5}{3} - 6 \times \frac{1}{5} = \frac{5}{3} - \frac{6}{5}$ Mise au même dénominateur (15) : $= \frac{5 \times 5}{3 \times 5} - \frac{6 \times 3}{5 \times 3} = \frac{25}{15} - \frac{18}{15} = \frac{25-18}{15} = \frac{7}{15}$.
- Priorité aux parenthèses : $\frac{-1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{-1 \times 3}{2 \times 3} + \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{-3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{-3+2}{6} = \frac{-1}{6}$ Ensuite, la soustraction : $\frac{7}{6} - \left(\frac{-1}{6}\right) = \frac{7}{6} + \frac{1}{6} = \frac{7+1}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.
- Priorité à la division : $\frac{1}{9} : 4 = \frac{1}{9} : \frac{4}{1} = \frac{1}{9} \times \frac{1}{4} = \frac{1 \times 1}{9 \times 4} = \frac{1}{36}$ Ensuite, l'addition : $\frac{-7}{4} + \frac{1}{36}$ Mise au même dénominateur (36) : $= \frac{-7 \times 9}{4 \times 9} + \frac{1}{36} = \frac{-63}{36} + \frac{1}{36} = \frac{-63+1}{36} = \frac{-62}{36} = \frac{-31}{18}$.

Remarque pédagogique :

L'utilisation de la calculatrice est un outil précieux pour vérifier les résultats, mais le calcul mental et à la main reste fondamental pour développer le sens du calcul et la compréhension des opérations.

Exemple : Valeur approchée de la racine carrée**Énoncé :** À l'aide de sa calculatrice, déterminer une valeur approchée au centième près de $\sqrt{7}$.**Solution étape par étape :**

- Utiliser la fonction racine carrée de la calculatrice pour $\sqrt{7}$.
- La calculatrice affiche environ 2,6457513...
- Arrondir au centième près (deux chiffres après la virgule). Le troisième chiffre est 5, donc on arrondit au-dessus.
- Une valeur approchée au centième près de $\sqrt{7}$ est 2,65.

Exemple : Racine carrée et géométrie**Énoncé :** Déterminer la valeur exacte et une valeur approchée du périmètre d'un carré d'aire 15 cm².**Solution étape par étape :**

- L'aire d'un carré est donnée par c^2 , où c est la longueur de son côté.
- On a $c^2 = 15$ cm². Donc $c = \sqrt{15}$ cm. C'est la valeur exacte du côté.
- Le périmètre d'un carré est $P = 4 \times c$.
- Donc, la valeur exacte du périmètre est $P = 4\sqrt{15}$ cm.
- Pour la valeur approchée, on utilise la calculatrice pour $\sqrt{15} \approx 3,87298...$
- $P \approx 4 \times 3,87298 \approx 15,4919...$
- Arrondi au centième, le périmètre est environ 15,49 cm.

Remarque pédagogique :

L'estimation d'ordres de grandeur permet de détecter des erreurs grossières de calcul. Par exemple, l'aire d'un disque de rayon 2 cm est $\pi \times 2^2 = 4\pi$. Comme $\pi \approx 3,14$, l'aire est d'environ $4 \times 3,14 = 12,56$ cm². Une estimation à 12 cm² est donc juste.

1.2 Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers

L'élève doit être capable de déterminer la liste des nombres premiers inférieurs à 100, de décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers et d'utiliser les nombres premiers inférieurs à 100 pour

reconnaître, produire et simplifier des fractions égales. Il doit aussi modéliser et résoudre des problèmes simples mettant en jeu les notions de divisibilité et de nombre premier.

Définition

Nombre premier

Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts positifs : 1 et lui-même.

Exemple : Nombres premiers

Énoncé : Énumérer tous les nombres premiers compris entre 50 et 70.

Solution étape par étape :

- On parcourt les nombres entiers de 50 à 70 et on teste leur divisibilité par les petits nombres premiers (2, 3, 5, 7...).
- 50, 51 (divisible par 3), 52, 54, 55 (divisible par 5), 56, 57 (divisible par 3), 58, 60, 62, 63 (divisible par 3), 64, 65 (divisible par 5), 66, 68, 69 (divisible par 3) ne sont pas premiers.
- 53 n'est divisible que par 1 et 53.
- 59 n'est divisible que par 1 et 59.
- 61 n'est divisible que par 1 et 61.
- 67 n'est divisible que par 1 et 67.
- Les nombres premiers compris entre 50 et 70 sont donc 53, 59, 61, 67.

Point de méthode

Décomposition en produit de facteurs premiers Pour décomposer un nombre en produit de facteurs premiers, on le divise successivement par les plus petits nombres premiers (2, 3, 5, 7, ...) jusqu'à obtenir un quotient de 1.

Exemple : Décomposition en facteurs premiers

Énoncé : Décomposer 780 en produit de facteurs premiers.

Solution étape par étape :

- $780 \div 2 = 390$
- $390 \div 2 = 195$
- $195 \div 3 = 65$
- $65 \div 5 = 13$
- $13 \div 13 = 1$

Donc, $780 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 13 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 13$.

Point de méthode

Simplifier une fraction en utilisant les nombres premiers Pour simplifier une fraction, on peut décomposer le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers, puis "barrer" les facteurs premiers communs.

Exemple : Simplification de fractions

Énoncé : Simplifier $\frac{140}{135}$.

Solution étape par étape :

- Décomposition de 140 : $140 = 2 \times 70 = 2 \times 2 \times 35 = 2^2 \times 5 \times 7$
- Décomposition de 135 : $135 = 5 \times 27 = 5 \times 3 \times 9 = 5 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^3 \times 5$
- On réécrit la fraction avec les décompositions : $\frac{2^2 \times 5 \times 7}{3^3 \times 5}$
- On simplifie par le facteur commun (5) : $\frac{2^2 \times 7}{3^3} = \frac{4 \times 7}{27} = \frac{28}{27}$

Donc, $\frac{140}{135} = \frac{28}{27}$.

Exemple : Reconnaissance de fractions égales

Énoncé : Reconnaître les fractions égales parmi les suivantes sans utiliser de calculatrice : $\frac{14}{49}$; $\frac{22}{55}$; $\frac{34}{85}$, $\frac{62}{155}$.

Solution étape par étape : On simplifie chaque fraction en décomposant numérateur et dénominateur en facteurs premiers :

$$\begin{aligned} - \frac{14}{49} &= \frac{2 \times 7}{7 \times 7} = \frac{2}{7} \\ - \frac{22}{55} &= \frac{2 \times 11}{5 \times 11} = \frac{2}{5} \\ - \frac{34}{85} &= \frac{2 \times 17}{5 \times 17} = \frac{2}{5} \\ - \frac{62}{155} &= \frac{2 \times 31}{5 \times 31} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Les fractions égales sont $\frac{22}{55}$, $\frac{34}{85}$ et $\frac{62}{155}$.

Point de méthode

Résoudre des problèmes de divisibilité (recherche de diviseurs communs) Pour trouver toutes les compositions identiques de bouquets (ou de lots, etc.), on cherche les diviseurs communs des nombres d'éléments, puis le plus grand commun diviseur (PGCD). Chaque diviseur commun est une composition possible.

Exemple : Problème de divisibilité

Énoncé : Un fleuriste doit réaliser des bouquets tous identiques. Il dispose pour cela de 434 roses et 620 tulipes. Quelles sont toutes les compositions de bouquets possibles ?

Solution étape par étape : Pour que les bouquets soient tous identiques, le nombre de bouquets doit être un diviseur commun à 434 et 620. On cherche les diviseurs de 434 et 620.

- Décomposition en facteurs premiers de 434 : $434 = 2 \times 217$ Pour 217, on teste les premiers nombres premiers : 217 n'est pas divisible par 3 (somme des chiffres 10), ni par 5. Pour 7 : $217 \div 7 = 31$. 31 est un nombre premier. Donc, $434 = 2 \times 7 \times 31$.
- Décomposition en facteurs premiers de 620 : $620 = 2 \times 310 = 2 \times 2 \times 155 = 2^2 \times 5 \times 31$.
- Les diviseurs communs de 434 et 620 sont les produits des facteurs premiers communs : Les facteurs premiers communs sont 2 et 31. Les diviseurs communs sont donc :
 - 1
 - 2
 - 31
 - $2 \times 31 = 62$

Le fleuriste peut donc réaliser 1, 2, 31 ou 62 bouquets.

- S'il fait 1 bouquet : 434 roses et 620 tulipes.
- S'il fait 2 bouquets : $434 \div 2 = 217$ roses et $620 \div 2 = 310$ tulipes par bouquet.
- S'il fait 31 bouquets : $434 \div 31 = 14$ roses et $620 \div 31 = 20$ tulipes par bouquet.
- S'il fait 62 bouquets : $434 \div 62 = 7$ roses et $620 \div 62 = 10$ tulipes par bouquet.

Toutes les compositions de bouquets possibles correspondent à ces nombres de bouquets : 1, 2, 31 et 62.