

Grandeurs et Mesures

0.1 Calculer avec des grandeurs mesurables et exprimer les résultats dans les unités adaptées

Les grandeurs mesurables sont des propriétés d'objets ou de phénomènes qui peuvent être quantifiées. En mathématiques, il est essentiel de savoir les manipuler et de les exprimer avec les unités adéquates.

0.1.1 Volumes des pyramides et des cônes

Définition

Une **pyramide** est un solide dont une face est un polygone (la base) et dont toutes les autres faces sont des triangles qui se rejoignent en un point commun (le sommet).

Définition

Un **cône de révolution** est un solide engendré par la rotation d'un triangle rectangle autour de l'un de ses côtés de l'angle droit (l'axe du cône). Sa base est un disque.

Propriété

Le volume V d'une pyramide ou d'un cône est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}$$

où la hauteur est la distance entre le sommet et le plan de la base, mesurée perpendiculairement à la base.

Point de méthode

Calculer le volume d'une pyramide ou d'un cône

1. Identifier la forme de la base (polygone pour la pyramide, disque pour le cône).
2. Calculer l'aire de la base en utilisant la formule appropriée (ex : c^2 pour un carré, $L \times l$ pour un rectangle, πr^2 pour un disque).
3. Identifier la hauteur du solide.
4. Appliquer la formule du volume $V = \frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}$.
5. Ne pas oublier d'exprimer le résultat avec l'unité de volume adaptée (ex : cm^3 , m^3).

Exemple 1. Une pyramide à base carrée a un côté de base de 5 cm et une hauteur de 9 cm. Calculez son volume.

Correction étape par étape :

1. *Forme de la base :* La base est un carré.
2. *Aire de la base :* Aire du carré = côté $\times$ côté = 5 cm $\times$ 5 cm = 25 cm^2 .
3. *Hauteur du solide :* La hauteur est $h = 9$ cm.
4. *Application de la formule du volume :* $V = \frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}$ $V = \frac{1}{3} \times 25 \text{ cm}^2 \times 9 \text{ cm}$
 $V = \frac{1}{3} \times 225 \text{ cm}^3$ $V = 75 \text{ cm}^3$.
5. *Unité :* Le volume est de 75 cm^3 .

Exemple 2. Un cône de révolution a un rayon de base de 3 cm et une hauteur de 7 cm. Calculez son volume (arrondir au dixième).

Correction étape par étape :

1. *Forme de la base* : La base est un disque.
2. *Aire de la base* : Aire du disque = $\pi \times \text{rayon}^2 = \pi \times (3 \text{ cm})^2 = 9\pi \text{ cm}^2$.
3. *Hauteur du solide* : La hauteur est $h = 7 \text{ cm}$.
4. *Application de la formule du volume* : $V = \frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}$ $V = \frac{1}{3} \times 9\pi \text{ cm}^2 \times 7 \text{ cm}$
 $V = 3\pi \times 7 \text{ cm}^3$ $V = 21\pi \text{ cm}^3$.
5. *Arrondi et unité* : En prenant $\pi \approx 3,14159$, $V \approx 21 \times 3,14159 \approx 65,97 \text{ cm}^3$. Arrondi au dixième, $V \approx 66,0 \text{ cm}^3$.

0.1.2 Conversions d'unités sur des grandeurs composées

Les grandeurs composées (comme les débits ou les vitesses) nécessitent des conversions d'unités plus complexes.

Point de méthode

Convertir des unités de grandeurs composées

1. Identifier les unités de départ et les unités cibles pour chaque composante de la grandeur (longueur, temps, volume, etc.).
2. Effectuer les conversions pour chaque composante séparément.
3. Combiner les conversions. Il est souvent utile d'écrire la grandeur sous forme de fraction.

Exemple 3. Convertir 36 km/h en m/s .

Correction étape par étape :

1. *Unités de départ et cibles* : Pour la longueur : kilomètres (km) $\rightarrow$ mètres (m) Pour le temps : heures (h) $\rightarrow$ secondes (s)
2. *Conversions séparées* : $1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$ $1 \text{ h} = 60 \text{ minutes} = 60 \times 60 \text{ secondes} = 3600 \text{ s}$
3. *Combinaison des conversions* : $36 \text{ km/h} = \frac{36 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{36 \times 1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{36000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 10 \text{ m/s}$.

Exemple 4. Convertir $0,5 \text{ m}^3/\text{s}$ en L/min .

Correction étape par étape :

1. *Unités de départ et cibles* : Pour le volume : mètres cubes (m^3) $\rightarrow$ litres (L) Pour le temps : secondes (s) $\rightarrow$ minutes (min)
2. *Conversions séparées* : $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}$ $1 \text{ s} = \frac{1}{60} \text{ min}$
3. *Combinaison des conversions* : $0,5 \text{ m}^3/\text{s} = \frac{0,5 \text{ m}^3}{1 \text{ s}} = \frac{0,5 \times 1000 \text{ L}}{1/60 \text{ min}} = \frac{500 \text{ L}}{1/60 \text{ min}} = 500 \times 60 \text{ L/min}$
 $= 30000 \text{ L/min}$.

0.2 Comprendre l'effet de quelques transformations sur les figures géométriques

Les transformations géométriques (agrandissement, réduction, translation) modifient la position ou la taille des figures, mais conservent certaines de leurs propriétés.

0.2.1 Agrandissement et réduction

Définition

Un **agrandissement** (ou une **réduction**) d'une figure est une transformation qui multiplie toutes les longueurs de la figure par un même nombre, appelé **rapport d'agrandissement** (ou de réduction).

- Si le rapport $k > 1$, c'est un agrandissement.
- Si $0 < k < 1$, c'est une réduction.

Propriété

Lors d'un agrandissement ou d'une réduction de rapport k :

- Les longueurs sont multipliées par k .
- Les aires sont multipliées par k^2 .
- Les volumes sont multipliés par k^3 .

Point de méthode

Calculer des longueurs, aires ou volumes après un agrandissement/réduction

1. Identifier le rapport k d'agrandissement ou de réduction.
2. Pour une longueur, multiplier la longueur initiale par k .
3. Pour une aire, multiplier l'aire initiale par k^2 .
4. Pour un volume, multiplier le volume initial par k^3 .

Exemple 5. Un pavé droit a les dimensions suivantes : $L = 12$ cm, $l = 6$ cm, $h = 4$ cm. On décide de réduire toutes les dimensions du pavé droit au tiers. Calculez les aires de chacune de ses faces et le volume du nouveau pavé droit.

Correction étape par étape :

1. *Calcul des dimensions initiales et du volume initial* : Les faces ont pour dimensions : Face 1 (longueur $\times$ largeur) : $12 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} = 72 \text{ cm}^2$ Face 2 (longueur $\times$ hauteur) : $12 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} = 48 \text{ cm}^2$ Face 3 (largeur $\times$ hauteur) : $6 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} = 24 \text{ cm}^2$ Volume initial $V_{\text{initial}} = L \times l \times h = 12 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} = 288 \text{ cm}^3$.
2. *Identification du rapport de réduction* : Le rapport de réduction est $k = \frac{1}{3}$.
3. *Calcul des aires des faces du nouveau pavé droit* : Les aires sont multipliées par $k^2 = (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$. Nouvelle Face 1 : $72 \text{ cm}^2 \times \frac{1}{9} = 8 \text{ cm}^2$. Nouvelle Face 2 : $48 \text{ cm}^2 \times \frac{1}{9} = \frac{48}{9} \text{ cm}^2 = \frac{16}{3} \text{ cm}^2$. Nouvelle Face 3 : $24 \text{ cm}^2 \times \frac{1}{9} = \frac{24}{9} \text{ cm}^2 = \frac{8}{3} \text{ cm}^2$.
4. *Calcul du volume du nouveau pavé droit* : Le volume est multiplié par $k^3 = (\frac{1}{3})^3 = \frac{1}{27}$. Nouveau volume $V_{\text{nouveau}} = V_{\text{initial}} \times k^3 = 288 \text{ cm}^3 \times \frac{1}{27} = \frac{288}{27} \text{ cm}^3 = \frac{32}{3} \text{ cm}^3$.

Remarque pédagogique : On peut vérifier les résultats en calculant les nouvelles dimensions et en recalculant les aires et le volume directement : $L' = 12 \times \frac{1}{3} = 4$ cm, $l' = 6 \times \frac{1}{3} = 2$ cm, $h' = 4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ cm. Nouvelle Face 1 : $4 \times 2 = 8 \text{ cm}^2$. Nouvelle Face 2 : $4 \times \frac{4}{3} = \frac{16}{3} \text{ cm}^2$. Nouvelle Face 3 : $2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \text{ cm}^2$. Nouveau volume : $4 \times 2 \times \frac{4}{3} = \frac{32}{3} \text{ cm}^3$. Les résultats sont cohérents.

0.2.2 Translation

Définition

Une **translation** est une transformation géométrique qui déplace chaque point d'une figure d'une même distance dans une même direction et un même sens. Elle est définie par un vecteur.

Propriété

Une translation conserve :

- le parallélisme des droites ;
- les longueurs ;
- les aires ;
- les angles.

Point de méthode

Utiliser les propriétés de la translation

1. Pour prouver que des droites sont parallèles : si l'une est l'image de l'autre par translation, alors elles sont parallèles.

2. Pour déterminer des longueurs, aires ou angles : si une figure est l'image d'une autre par translation, alors leurs longueurs, aires et mesures d'angles correspondantes sont égales.

Exemple 6. *Un triangle ABC est translaté pour donner le triangle $A'B'C'$. Sachant que $AB = 5$ cm, que peut-on dire de $A'B'$?*

Correction : Par définition, une translation conserve les longueurs. Donc, si $A'B'C'$ est l'image de ABC par translation, alors $A'B' = AB$. Par conséquent, $A'B' = 5$ cm.

Exemple 7. *Expliquez pourquoi les lignes horizontales d'une frise obtenue par translation d'un motif sont parallèles.*

Correction : Si une frise est obtenue par translation d'un motif, cela signifie que chaque élément de la frise est l'image d'un motif initial par une série de translations. Les propriétés d'une translation indiquent qu'elle conserve le parallélisme. Par conséquent, si le motif initial contient des segments parallèles, leurs images par translation resteront parallèles, ce qui explique le parallélisme des lignes horizontales de la frise.