

MATHÉMATIQUES - 3^e

ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS

1 Interpréter, représenter et traiter des données

1.1 Lecture, interprétation et représentation des données

Les données peuvent être présentées sous différentes formes : tableaux, diagrammes en bâtons, diagrammes circulaires, et histogrammes. Il est essentiel de savoir lire et interpréter ces différentes représentations.

Définition

Un **histogramme** est un graphique composé de rectangles juxtaposés, dont les aires sont proportionnelles aux effectifs des classes qu'ils représentent. Pour des classes de même amplitude, la hauteur des rectangles est proportionnelle aux effectifs.

Point de méthode

Pour représenter des données par un histogramme :

1. Assurez-vous que les classes ont la même amplitude. Si ce n'est pas le cas, il faut ajuster la hauteur des rectangles en calculant la densité (effectif / amplitude de la classe).
2. Pour chaque classe, dessinez un rectangle dont la base correspond à l'amplitude de la classe sur l'axe des abscisses et dont la hauteur est proportionnelle à l'effectif (ou la densité) sur l'axe des ordonnées.

Exemple commenté

Une enquête a été réalisée auprès de 2 500 personnes concernant l'âge d'obtention d'un emploi correspondant à leur qualification. Les résultats sont donnés dans le

tableau suivant :

Âge	Effectif
[18; 22[	100
[22; 26[	200
[26; 30[	400
[30; 34[	1 100
[34; 38[	700

Représenter ces résultats par un histogramme.

Solution commentée : Toutes les classes ont une amplitude de 4 ans. La hauteur des rectangles sera donc proportionnelle aux effectifs.

1. Tracez un axe horizontal pour l'âge et un axe vertical pour l'effectif.
2. Pour chaque intervalle d'âge, dessinez un rectangle :
 - De 18 à 22 ans : hauteur 100.
 - De 22 à 26 ans : hauteur 200.
 - De 26 à 30 ans : hauteur 400.
 - De 30 à 34 ans : hauteur 1100.
 - De 34 à 38 ans : hauteur 700.

1.2 Calcul et interprétation de l'étendue, des effectifs et des fréquences

Définition

L'**étendue** d'une série statistique est la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale de la série.

Point de méthode

Pour calculer l'étendue :

1. Identifiez la valeur la plus élevée de la série de données.
2. Identifiez la valeur la moins élevée de la série de données.
3. Soustrayez la valeur minimale de la valeur maximale.

Définition

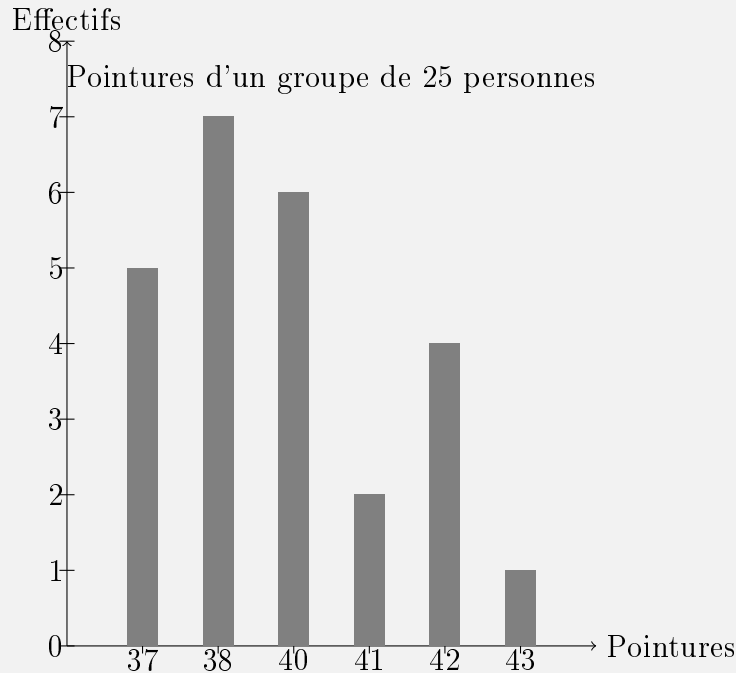
L'**effectif** d'une valeur ou d'une classe est le nombre de fois où cette valeur (ou les valeurs de cette classe) apparaît dans la série statistique.

La **fréquence** d'une valeur ou d'une classe est le quotient de son effectif par l'effectif total de la série. Elle peut être exprimée en valeur décimale ou en pourcentage.

$$\text{Fréquence} = \frac{\text{Effectif de la valeur ou de la classe}}{\text{Effectif total}}$$

Exemple commenté

À partir du diagramme en bâtons ci-dessous, représentant les pointures d'un groupe de 25 personnes :



1. Calculez le nombre de personnes chaussant au moins du 40.
2. Calculez la fréquence des personnes chaussant au plus du 42.
3. Calculez le nombre de personnes chaussant entre 38 et 41 (inclus).

Solution commentée :

1. *Personnes chaussant au moins du 40* : Il s'agit des personnes chaussant du 40, 41, 42 ou 43. Effectif = Effectif(40) + Effectif(41) + Effectif(42) + Effectif(43) Effectif = $6 + 2 + 4 + 1 = 13$ personnes.
2. *Fréquence des personnes chaussant au plus du 42* : Il s'agit des personnes chaussant du 37, 38, 40, 41 ou 42. Effectif = Effectif(37) + Effectif(38) + Effectif(40) + Effectif(41) + Effectif(42) Effectif = $5 + 7 + 6 + 2 + 4 = 24$ personnes. L'effectif total est de 25 personnes. Fréquence = $\frac{24}{25} = 0,96$ ou 96%.
3. *Nombre de personnes chaussant entre 38 et 41 (inclus)* : Il s'agit des personnes chaussant du 38, 40 ou 41. Effectif = Effectif(38) + Effectif(40) + Effectif(41) Effectif = $7 + 6 + 2 = 15$ personnes.

2 Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilités

2.1 Calcul de probabilités pour des expériences aléatoires simples

Définition

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat ne peut être prédit avec certitude.

Une **issue** est un résultat possible d'une expérience aléatoire.

Un **événement** est un ensemble d'issues.

La **probabilité** d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1 qui exprime la "chance" que cet événement se produise. Dans le cas d'une situation d'équiprobabilité (chaque issue a la même probabilité de se produire), la probabilité d'un événement A est donnée par la formule :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre d'issues favorables à A}}{\text{Nombre total d'issues possibles}}$$

Propriété

La somme des probabilités de toutes les issues d'une expérience aléatoire est égale à 1.

L'événement **contraire** d'un événement A, noté $\overline{A}$, est l'événement qui se réalise si et seulement si A ne se réalise pas.

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Point de méthode

Pour calculer des probabilités :

1. Listez toutes les issues possibles de l'expérience aléatoire (cela constitue l'univers des possibles).
2. Déterminez le nombre total d'issues possibles.
3. Identifiez les issues favorables à l'événement dont vous voulez calculer la probabilité.
4. Déterminez le nombre d'issues favorables.
5. Appliquez la formule de la probabilité si les issues sont équiprobables.

Exemple commenté

On suppose que, pour un couple, la probabilité d'avoir une fille ou un garçon est la même. Un couple souhaite avoir deux enfants.

1. Calculez, en explicitant les issues possibles, la probabilité d'avoir deux garçons.
2. Calculez la probabilité que le couple ait au moins une fille.

Solution commentée :

1. *Issues possibles* : Nous pouvons représenter les issues par (1er enfant, 2ème enfant). Les issues possibles sont : (Fille, Fille), (Fille, Garçon), (Garçon, Fille), (Garçon, Garçon). Il y a 4 issues possibles au total. L'événement "avoir deux garçons" correspond à l'issue : (Garçon, Garçon). Il y a 1 issue favorable. La probabilité d'avoir deux garçons est $P(2 \text{ Garçons}) = \frac{1}{4}$.
2. *Probabilité d'avoir au moins une fille* : L'événement "avoir au moins une fille" signifie avoir une fille et un garçon, ou deux filles. Les issues favorables sont : (Fille, Fille), (Fille, Garçon), (Garçon, Fille). Il y a 3 issues favorables. La probabilité d'avoir au moins une fille est $P(\text{au moins 1 Fille}) = \frac{3}{4}$.
Remarque pédagogique : L'événement "avoir au moins une fille" est l'événement contraire de "avoir deux garçons". Donc, $P(\text{au moins 1 Fille}) = 1 - P(2 \text{ Garçons}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Exemple commenté

On tire, deux fois de suite et avec remise, une boule dans une urne contenant une boule bleue (B) et deux boules violettes (V1, V2). Déterminez la probabilité de tirer successivement deux boules violettes, en utilisant une méthode de dénombrement prenant appui sur un tableau à double entrée.

Solution commentée : Puisqu'il y a deux boules violettes distinctes (V1 et V2), nous les différencions pour lister toutes les issues possibles. Les boules dans l'urne sont : B, V1, V2. Comme le tirage est avec remise, le premier tirage n'influence pas le second.

Tableau à double entrée des issues possibles (1er tirage; 2ème tirage) :

2ème tirage / 1er tirage	B	V1	V2
B	(B,B)	(V1,B)	(V2,B)
V1	(B,V1)	(V1,V1)	(V2,V1)
V2	(B,V2)	(V1,V2)	(V2,V2)

Il y a $3 \times 3 = 9$ issues possibles au total. L'événement "tirer successivement deux boules violettes" correspond aux issues où les deux boules tirées sont violettes. Ces issues sont : (V1,V1), (V1,V2), (V2,V1), (V2,V2). Il y a 4 issues favorables. La probabilité de tirer successivement deux boules violettes est $P(2 \text{ Violettes}) = \frac{4}{9}$.

2.2 Lien entre stabilisation des fréquences et probabilités

Propriété

Lorsque l'on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence d'apparition d'un événement tend à se stabiliser autour d'une valeur, qui est la probabilité de cet événement. C'est la **loi des grands nombres**.

Remarque pédagogique

Cette propriété est fondamentale pour comprendre le sens de la probabilité. Elle explique pourquoi les simulations (souvent réalisées à l'aide d'un tableur ou d'un logiciel de programmation) sont utiles pour estimer des probabilités. Plus le nombre de lancers (ou de répétitions) est élevé, plus la fréquence observée se rapproche de la probabilité théorique.

Exemple commenté

On donne les fréquences d'apparition de chaque face d'un dé pour 10 000 lancers. L'élève interprète les résultats en les comparant aux probabilités théoriques.

Solution commentée : Un dé équilibré a 6 faces, et la probabilité théorique de chaque face est $\frac{1}{6} \approx 0,167$. Si les fréquences obtenues après 10 000 lancers sont proches de 0,167 pour chaque face, cela indique que le dé est probablement équilibré. Si une face a une fréquence significativement différente, cela pourrait suggérer que le dé est truqué.

3 Résoudre des problèmes de proportionnalité

3.1 Modélisation par une fonction linéaire

Définition

Deux grandeurs sont dites **proportionnelles** si l'on peut passer de l'une à l'autre en multipliant par un même nombre, appelé **coefficient de proportionnalité**.

Propriété

Une situation de proportionnalité peut être modélisée par une **fonction linéaire**. Une fonction linéaire est une fonction f de la forme $f(x) = ax$, où a est un nombre fixé (le coefficient de proportionnalité).

Exemple commenté

Un mobile se déplace à 5 m/s . L'élève modélise la situation par $d(x) = 5x$ où x est le temps exprimé en secondes et $d(x)$ la distance parcourue, en mètres, en x secondes.

Solution commentée : Ici, la distance parcourue est proportionnelle au temps de déplacement. Le coefficient de proportionnalité est la vitesse (5 m/s). La fonction $d(x) = 5x$ représente cette relation de proportionnalité. Pour un temps x , la distance $d(x)$ est égale à 5 fois x .

3.2 Pourcentage d'évolution et coefficient multiplicateur

Propriété

Une augmentation de $t\%$ se traduit par une multiplication par le coefficient multiplicateur $1 + \frac{t}{100}$.

Une diminution de $t\%$ se traduit par une multiplication par le coefficient multiplicateur $1 - \frac{t}{100}$.

Exemple commenté

1. Il sait qu'une augmentation de 5% se traduit par une multiplication par 1,05.
2. Il sait qu'une diminution de 20% se traduit par une multiplication par 0,8.

Solution commentée :

1. Pour une augmentation de 5%, le coefficient multiplicateur est $1 + \frac{5}{100} = 1 + 0,05 = 1,05$.
2. Pour une diminution de 20%, le coefficient multiplicateur est $1 - \frac{20}{100} = 1 - 0,20 = 0,80$.

3.3 Proportionnalité en géométrie

Propriété

La proportionnalité est une notion clé en géométrie, notamment dans le cadre du théorème de Thalès, des triangles semblables et des homothéties.

Théorème

Théorème de Thalès (version « papillon ») : Soient deux droites (BM) et (CN) sécantes en A. Si (BC) est parallèle à (MN), alors $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$.

Définition

Deux triangles sont **semblables** si leurs angles sont deux à deux égaux et si les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles.

Définition

Une **homothétie** de centre O et de rapport k (non nul) est une transformation qui agrandit ou réduit une figure.

- Si $k > 1$ ou $k < -1$, c'est un agrandissement.
- Si $-1 < k < 1$ (et $k \neq 0$), c'est une réduction.

Dans une homothétie de rapport k :

- Les longueurs sont multipliées par $|k|$.
- Les aires sont multipliées par k^2 .
- Les volumes sont multipliés par $|k|^3$.

Point de méthode

Pour utiliser la proportionnalité en géométrie :

1. Identifiez les figures concernées (triangles, figures agrandies/réduites).
2. Déterminez si les conditions d'application (parallélisme pour Thalès, égalité des angles pour triangles semblables, centre et rapport pour homothétie) sont remplies.
3. Écrivez les rapports de longueurs proportionnels.
4. Utilisez ces rapports pour calculer les longueurs inconnues.

4 Comprendre et utiliser la notion de fonction

4.1 Notations et vocabulaire fonctionnels

Définition

Une **fonction** est un processus qui, à chaque nombre d'un ensemble de départ, associe un unique nombre dans un ensemble d'arrivée.

Propriété

- On note souvent une fonction $f : x \mapsto f(x)$ ou $f(x) = \dots$
- x est la **variable** de la fonction.
- $f(x)$ est l'**image** de x par la fonction f .
- Un nombre a est un **antécédent** de b par la fonction f si $f(a) = b$. Un nombre peut avoir plusieurs antécédents, ou aucun.

Exemple commenté

Soit la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 7$.

- x est la variable et f est la fonction.
- Calculons l'image de 2 par la fonction f : $f(2) = 3(2)^2 - 7 = 3 \times 4 - 7 = 12 - 7 = 5$. L'image de 2 par f est 5.

Exemple commenté

Si $g(3) = 15$, cela signifie que 15 est l'image de 3 par la fonction g , et que 3 est un antécédent de 15 par la fonction g .

4.2 Modes de représentation d'une fonction et détermination d'images et d'antécédents

Une fonction peut être représentée de plusieurs façons :

- Par une **expression symbolique** (formule algébrique).
- Par un **tableau de valeurs**.
- Par une **représentation graphique**.
- Par un **programme de calcul**.

Point de méthode

Déterminer l'image d'un nombre :

- **À partir d'une expression symbolique** : Remplacez la variable x par la valeur donnée dans la formule et calculez le résultat.
- **À partir d'un tableau de valeurs** : Cherchez le nombre donné dans la ligne/colonne de la variable et lisez l'image correspondante.
- **À partir d'une représentation graphique** : Placez-vous sur l'axe des abscisses à la valeur du nombre, montez ou descendez jusqu'à la courbe, puis lisez la valeur sur l'axe des ordonnées.

Point de méthode

Déterminer un antécédent d'un nombre :

- **À partir d'une expression symbolique** : Posez l'équation $f(x) =$ valeur donnée et résolvez-la.
- **À partir d'un tableau de valeurs** : Cherchez la valeur donnée dans la ligne/colonne des images et lisez le(s) antécédent(s) correspondant(s).
- **À partir d'une représentation graphique** : Placez-vous sur l'axe des ordonnées à la valeur donnée, déplacez-vous horizontalement jusqu'à la courbe, puis lisez la (les) valeur(s) sur l'axe des abscisses.

Exemple commenté

Déterminer à l'aide d'une équation :

1. L'antécédent de 10 par la fonction f définie par $f(x) = -3x - 4$.
2. Les antécédents de 0 par la fonction g définie par $g(x) = (3x + 6)(x - 9)$.

Solution commentée :

1. Pour trouver l'antécédent de 10 par $f(x) = -3x - 4$, on résout l'équation $f(x) = 10$. $-3x - 4 = 10$ $-3x = 10 + 4$ $-3x = 14$ $x = -\frac{14}{3}$ L'antécédent de 10 par la fonction f est $-\frac{14}{3}$.
2. Pour trouver les antécédents de 0 par $g(x) = (3x + 6)(x - 9)$, on résout l'équation $g(x) = 0$. C'est une équation produit nul : un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Donc, $3x + 6 = 0$ ou $x - 9 = 0$. $3x = -6 \Rightarrow x = -2$. $x = 9$. Les antécédents de 0 par la fonction g sont -2 et 9.

4.3 Représentation graphique des fonctions linéaires et affines

Définition

Une **fonction linéaire** est une fonction de la forme $f(x) = ax$. Sa représentation graphique est une droite passant par l'origine du repère (point $(0,0)$).

Une **fonction affine** est une fonction de la forme $f(x) = ax + b$. Sa représentation graphique est une droite qui ne passe pas nécessairement par l'origine.

- a est le **coefficient directeur** (ou pente) de la droite. Il indique la direction de la droite.
- b est l'**ordonnée à l'origine**. C'est la valeur de y lorsque $x = 0$, et c'est le point où la droite coupe l'axe des ordonnées.

Propriété**Interprétation des paramètres d'une fonction affine :**

- Si $a > 0$, la droite "monte" (la fonction est croissante).
- Si $a < 0$, la droite "descend" (la fonction est décroissante).
- Si $a = 0$, la droite est horizontale (la fonction est constante, $f(x) = b$).
- Si $b > 0$, la droite coupe l'axe des ordonnées au-dessus de l'origine.
- Si $b < 0$, la droite coupe l'axe des ordonnées en dessous de l'origine.
- Si $b = 0$, la droite passe par l'origine (c'est une fonction linéaire).

Point de méthode

Pour représenter graphiquement une fonction linéaire ou affine :

1. Choisissez au moins deux valeurs de x .
2. Calculez les images $f(x)$ correspondantes.
3. Placez les points $(x, f(x))$ dans un repère.
4. Tracez la droite passant par ces points. *Conseil* : Pour une fonction linéaire, un point est l'origine (0,0). Pour une fonction affine, un point est (0, b), l'ordonnée à l'origine.

Exemple commenté

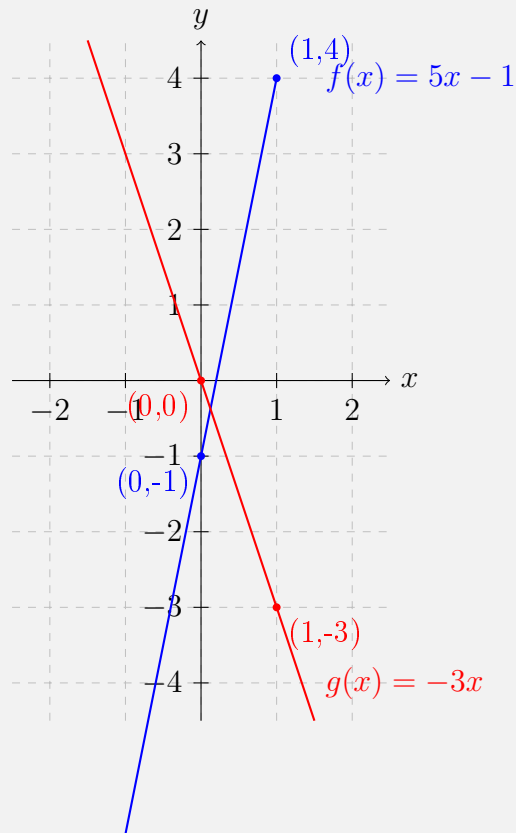
Représentez graphiquement les fonctions $f : x \mapsto 5x - 1$ et $g : x \mapsto -3x$.

Solution commentée : Fonction $f(x) = 5x - 1$ (fonction affine) :

- Si $x = 0$, $f(0) = 5(0) - 1 = -1$. Point $(0, -1)$.
- Si $x = 1$, $f(1) = 5(1) - 1 = 4$. Point $(1, 4)$.
- Tracez la droite passant par $(0, -1)$ et $(1, 4)$. Le coefficient directeur est $a = 5 > 0$, la droite monte. L'ordonnée à l'origine est $b = -1$.

Fonction $g(x) = -3x$ (fonction linéaire) :

- Si $x = 0$, $g(0) = -3(0) = 0$. Point $(0, 0)$. (Passe par l'origine, c'est une fonction linéaire).
- Si $x = 1$, $g(1) = -3(1) = -3$. Point $(1, -3)$.
- Tracez la droite passant par $(0, 0)$ et $(1, -3)$. Le coefficient directeur est $a = -3 < 0$, la droite descend.



4.4 Modélisation de phénomènes continus et résolution de problèmes

Propriété

Les fonctions permettent de modéliser des phénomènes variés (physiques, économiques, etc.) et de résoudre des problèmes en utilisant un ou plusieurs modes de représentation (formule, tableau, graphique).

Exemple commenté

Complétez : l'aire d'un rectangle dont le périmètre est égal à 30 cm et dont un côté a pour longueur x est donnée par la fonction $A : x \mapsto \dots$

Solution commentée : Soit un rectangle de longueur L et de largeur l . Le périmètre $P = 2L + 2l = 30$ cm. Si un côté a pour longueur x , disons $L = x$. Alors $2x + 2l = 30$. $2l = 30 - 2x$. $l = \frac{30-2x}{2} = 15 - x$. L'aire A du rectangle est $A = L \times l$. En remplaçant L par x et l par $15 - x$, on obtient : $A(x) = x(15 - x) = 15x - x^2$. Donc, la fonction est $A : x \mapsto 15x - x^2$.

Exemple commenté

On enlève quatre carrés identiques aux quatre coins d'un rectangle de 20 cm de longueur et 13 cm de largeur. Déterminez la longueur du côté de ces carrés qui correspond à une aire restante de 208,16 cm², par la méthode de votre choix.

Solution commentée : Soit c la longueur du côté des carrés enlevés. L'aire initiale du rectangle est $A_{\text{initial}} = 20 \times 13 = 260$ cm². Chaque carré enlevé a une aire de c^2 . Comme il y a quatre carrés identiques, l'aire totale enlevée est $4c^2$. L'aire restante est $A_{\text{restante}} = A_{\text{initial}} - 4c^2$. On nous donne $A_{\text{restante}} = 208,16$ cm². Nous devons résoudre l'équation : $260 - 4c^2 = 208,16$ $4c^2 = 260 - 208,16$ $4c^2 = 51,84$ $c^2 = \frac{51,84}{4}$ $c^2 = 12,96$ $c = \sqrt{12,96}$ (puisque une longueur est positive) $c = 3,6$ cm. La longueur du côté de ces carrés est 3,6 cm.