

Polycopié de Mathématiques – Classe de 3^e

ExoMaths.fr

Année scolaire 2024-2025

Table des matières

1	Nombres et Calculs	2
1.1	Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes	2
1.1.1	Les puissances	2
1.1.2	Notation scientifique	2
1.1.3	Calcul avec des racines carrées	3
1.2	Problèmes impliquant des puissances et des racines carrées	3
1.3	Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers	4
1.3.1	Fractions irréductibles	5
1.3.2	Problèmes de divisibilité	5
1.4	Utiliser le calcul littéral	6
1.4.1	Expressions littérales et leur simplification	6
1.4.2	Résolution d'équations	7
1.4.3	Résolution de problèmes avec le calcul littéral	9

1 Nombres et Calculs

1.1 Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes

1.1.1 Les puissances

Définition

Une puissance d'un nombre est une manière simplifiée d'écrire une multiplication répétée du même nombre par lui-même.

- Pour un entier $n > 0$, $a^n = a \times a \times \cdots \times a$ (n fois).
- Pour $n = 0$ et $a \neq 0$, $a^0 = 1$.
- Pour un entier $n > 0$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Exemple commenté

- $8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^5$.
- $0,3 \times 0,3 \times 0,3 \times 0,3 \times 0,3 = (0,3)^5$.
- $\frac{1}{6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6} = 6^{-5}$.

Propriété

Pour tous nombres a et b non nuls, et pour tous entiers relatifs m et n :

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \times n}$
- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

1.1.2 Notation scientifique

Définition

La notation scientifique d'un nombre est une manière de l'écrire sous la forme $a \times 10^n$, où a est un nombre décimal tel que $1 \leq |a| < 10$ et n est un entier relatif.

Point de méthode

Écrire un nombre en notation scientifique

1. Déplacer la virgule pour obtenir un nombre a tel que $1 \leq |a| < 10$.
2. Compter le nombre de places dont la virgule a été déplacée. Ce nombre sera n .
3. Si la virgule a été déplacée vers la gauche, n est positif. Si elle a été déplacée vers la droite, n est négatif.

Exemple commenté

- $12\,300 = 1,23 \times 10^4$.
- $0,000\,045 = 4,5 \times 10^{-5}$.

Remarque pédagogique

La notation scientifique est particulièrement utile pour manipuler des nombres très grands ou très petits, comme en physique ou en chimie.

1.1.3 Calcul avec des racines carrées

Définition

La racine carrée d'un nombre réel positif a , notée $\sqrt{a}$, est le nombre réel positif dont le carré est a . Autrement dit, $(\sqrt{a})^2 = a$.

Propriété

Pour tous nombres réels positifs a et b :

- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (avec $b \neq 0$)
- $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$

Point de méthode

Simplifier une expression avec des racines carrées Pour simplifier une expression contenant une racine carrée, on cherche à écrire le nombre sous la racine comme un produit où l'un des facteurs est un carré parfait.

Exemple commenté

- Simplifier $\sqrt{12}$. $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.
- Déterminer la valeur exacte puis approchée au millimètre près de la longueur du côté d'un carré d'aire 17 cm^2 . Soit c la longueur du côté du carré. L'aire est c^2 . Donc $c^2 = 17$, ce qui implique $c = \sqrt{17} \text{ cm}$ (valeur exacte). Pour l'approche au millimètre près, $\sqrt{17} \approx 4,123 \text{ cm}$. Au millimètre près, $c \approx 4,1 \text{ cm}$.

1.2 Problèmes impliquant des puissances et des racines carrées

Exemple commenté

Problème de la balle rebondissante On laisse tomber une balle d'une hauteur de 1 m. À chaque rebond, elle rebondit aux trois-quarts de la hauteur d'où elle est tombée. Quelle est la hauteur de la balle au troisième rebond ?

Solution :

1. Hauteur initiale : $H_0 = 1 \text{ m}$.
2. Hauteur après le 1^{er} rebond : $H_1 = H_0 \times \frac{3}{4} = 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \text{ m}$.
3. Hauteur après le 2^e rebond : $H_2 = H_1 \times \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right) \times \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \text{ m}$.
4. Hauteur après le 3^e rebond : $H_3 = H_2 \times \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} \text{ m}$.

La hauteur de la balle au troisième rebond est $\frac{27}{64} \text{ m}$.

Exemple commenté

Problème de division bactérienne Une bactérie se divise en deux toutes les trente minutes. Un chercheur place une bactérie en conditions favorables. Combien obtient-il de milliards de bactéries au bout de 18 h ?

Solution :

1. Calcul du nombre de divisions : 18 heures = 18×60 minutes = 1080 minutes. Nombre de divisions = $\frac{1080}{30} = 36$ divisions.
2. Nombre de bactéries après n divisions : Initialement 1 bactérie, après 1 division 2 bactéries, après 2 divisions $2^2 = 4$ bactéries, etc. Après 36 divisions, le nombre de bactéries sera 2^{36} .
3. Calcul de 2^{36} : $2^{36} = 68\,719\,476\,736$.
4. Conversion en milliards : $68\,719\,476\,736$ bactéries $\approx 68,7$ milliards de bactéries.

Au bout de 18 heures, le chercheur obtiendra environ 68,7 milliards de bactéries.

Exemple commenté

Masse d'un atome de cuivre Il y a environ 2×10^{15} atomes de cuivre dans 211 ng de cuivre. Quelle est environ la masse d'un atome de cuivre ? On rappellera que ng est le symbole du nanogramme.

Solution :

1. Convertir les nanogrammes en grammes (ou kilogrammes) : $1 \text{ ng} = 10^{-9} \text{ g}$. Donc, $211 \text{ ng} = 211 \times 10^{-9} \text{ g} = 2,11 \times 10^2 \times 10^{-9} \text{ g} = 2,11 \times 10^{-7} \text{ g}$.
2. Calculer la masse d'un atome : Masse d'un atome = $\frac{\text{Masse totale}}{\text{Nombre d'atomes}}$ Masse d'un atome = $\frac{2,11 \times 10^{-7}}{2 \times 10^{15}} \text{ g}$ Masse d'un atome = $\frac{2,11}{2} \times \frac{10^{-7}}{10^{15}} \text{ g}$ Masse d'un atome = $1,055 \times 10^{-7-15} \text{ g}$ Masse d'un atome = $1,055 \times 10^{-22} \text{ g}$.

La masse d'un atome de cuivre est d'environ $1,055 \times 10^{-22} \text{ g}$.

1.3 Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers

Définition

- Un entier a est un **diviseur** d'un entier b s'il existe un entier k tel que $b = a \times k$. On dit aussi que b est un **multiple** de a , ou que b est **divisible** par a .
- Un **nombre premier** est un entier naturel supérieur à 1 qui n'a que deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

Point de méthode

Décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers

1. Essayer de diviser le nombre par les plus petits nombres premiers (2, 3, 5, 7, 11, etc.) dans l'ordre croissant.
2. Continuer à diviser le quotient par le même nombre premier tant que c'est possible.
3. Passer au nombre premier suivant lorsque la division n'est plus possible.
4. Répéter le processus jusqu'à obtenir un quotient de 1.

Exemple commenté

Décomposer 306, 124 et 2220 en produit de facteurs premiers.

- Pour 306 : $306 \div 2 = 153$ $153 \div 3 = 51$ $51 \div 3 = 17$ $17 \div 17 = 1$ Donc, $306 = 2 \times 3^2 \times 17$.
- Pour 124 : $124 \div 2 = 62$ $62 \div 2 = 31$ $31 \div 31 = 1$ Donc, $124 = 2^2 \times 31$.
- Pour 2220 : $2220 \div 2 = 1110$ $1110 \div 2 = 555$ $555 \div 3 = 185$ $185 \div 5 = 37$ $37 \div 37 = 1$ Donc, $2220 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 37$.

Remarque pédagogique

La décomposition en facteurs premiers est unique pour chaque nombre entier. C'est un outil fondamental en arithmétique.

1.3.1 Fractions irréductibles**Définition**

Une fraction est dite **irréductible** lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux, c'est-à-dire que leur plus grand diviseur commun (PGCD) est 1.

Point de méthode

Rendre une fraction irréductible Pour rendre une fraction irréductible, on peut diviser le numérateur et le dénominateur par leur plus grand diviseur commun (PGCD), ou bien utiliser la décomposition en facteurs premiers pour simplifier tous les facteurs communs.

Exemple commenté

Rendre irréductibles les fractions suivantes : $\frac{66}{30}$, $\frac{12}{51}$, $\frac{140}{340}$, $\frac{7140}{2310}$.

- Pour $\frac{66}{30}$: $66 = 2 \times 3 \times 11$ $30 = 2 \times 3 \times 5$ PGCD(66, 30) = $2 \times 3 = 6$. $\frac{66}{30} = \frac{66 \div 6}{30 \div 6} = \frac{11}{5}$.
- Pour $\frac{12}{51}$: $12 = 2^2 \times 3$ $51 = 3 \times 17$ PGCD(12, 51) = 3. $\frac{12}{51} = \frac{12 \div 3}{51 \div 3} = \frac{4}{17}$.
- Pour $\frac{140}{340}$: $140 = 14 \times 10 = 2 \times 7 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5 \times 7$ $340 = 34 \times 10 = 2 \times 17 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5 \times 17$ PGCD(140, 340) = $2^2 \times 5 = 20$. $\frac{140}{340} = \frac{140 \div 20}{340 \div 20} = \frac{7}{17}$.
- Pour $\frac{7140}{2310}$: Simplifions d'abord par 10 : $\frac{714}{231}$. $714 = 2 \times 3 \times 7 \times 17$ $231 = 3 \times 7 \times 11$ PGCD(714, 231) = $3 \times 7 = 21$. $\frac{714}{231} = \frac{714 \div 21}{231 \div 21} = \frac{34}{11}$.

1.3.2 Problèmes de divisibilité**Point de méthode**

Résoudre des problèmes de conjonction de phénomènes (recherche de PPCM) Pour trouver le moment où deux événements ou plus se produiront de nouveau simultanément, il faut chercher le Plus Petit Commun Multiple (PPCM) des durées des cycles de chaque événement.

Exemple commenté

Deux ampoules clignotent. L'une s'allume toutes les 153 secondes et l'autre toutes les 187 secondes. À minuit, elles s'allument ensemble. Détermine l'heure à laquelle elles s'allumeront de nouveau ensemble.

Solution : Nous devons trouver le Plus Petit Commun Multiple (PPCM) de 153 et 187.

1. Décomposition en facteurs premiers : $153 = 3 \times 51 = 3 \times 3 \times 17 = 3^2 \times 17$ $187 = 11 \times 17$
2. Calcul du PPCM : Le PPCM est le produit des facteurs premiers communs et non communs, pris avec leur plus grande puissance. $\text{PPCM}(153, 187) = 3^2 \times 11 \times 17 = 9 \times 11 \times 17 = 99 \times 17 = 1683$.
3. Conversion en minutes et secondes : 1683 secondes. $1683 \div 60 = 28$ avec un reste de 3. Donc 1683 secondes = 28 minutes et 3 secondes.
4. Détermination de l'heure : Si elles s'allument ensemble à minuit (00h00min00s), elles s'allumeront de nouveau ensemble à 00h28min03s.

1.4 Utiliser le calcul littéral

1.4.1 Expressions littérales et leur simplification

Définition

Une **expression littérale** est une expression mathématique qui contient des lettres (variables) en plus des nombres et des opérations.

Point de méthode

Déterminer l'opposé d'une expression littérale L'opposé d'une expression littérale s'obtient en changeant le signe de chaque terme de l'expression. C'est équivalent à multiplier l'expression par -1 .

Exemple commenté

L'opposé de $3x - 7$ est $-(3x - 7) = -3x + 7$.

Point de méthode**Développer, factoriser et réduire des expressions algébriques**

- **Développer** : Transformer un produit en une somme (ou différence). On utilise la distributivité simple ($a(b + c) = ab + ac$) ou double ($(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$).
- **Réduire** : Simplifier une expression en regroupant les termes de même nature (même variable et même puissance).
- **Factoriser** : Transformer une somme (ou différence) en un produit. On cherche un facteur commun ou on utilise les identités remarquables.

Propriété

Identités remarquables Pour tous nombres a et b :

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Exemple commenté

Développer et réduire les expressions suivantes :

- $(2x-3)(5x+7) = 2x \times 5x + 2x \times 7 - 3 \times 5x - 3 \times 7 = 10x^2 + 14x - 15x - 21 = 10x^2 - x - 21$
- $-4x(6-3x) = -4x \times 6 - 4x \times (-3x) = -24x + 12x^2$
- $3(2x+1) - (6-x) = 6x + 3 - 6 + x = 7x - 3$

Exemple commenté

Factoriser les expressions suivantes :

- $x^2 - 64$ On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ avec $a = x$ et $b = 8$.
 $x^2 - 64 = (x-8)(x+8)$.
- $4x^2 - 49$ On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ avec $a = 2x$ et $b = 7$.
 $4x^2 - 49 = (2x-7)(2x+7)$.
- $5a + 15b$ Le facteur commun est 5. $5a + 15b = 5(a+3b)$.
- $12x^2 - 15x$ Le facteur commun est $3x$. $12x^2 - 15x = 3x(4x-5)$.
- $16x^2 - 144$ On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ avec $a = 4x$ et $b = 12$.
 $16x^2 - 144 = (4x-12)(4x+12) = 4(x-3) \times 4(x+3) = 16(x-3)(x+3)$.
- $x^2 - 13$ On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ avec $a = x$ et $b = \sqrt{13}$.
 $x^2 - 13 = (x-\sqrt{13})(x+\sqrt{13})$.

Exemple commenté

Développer les expressions suivantes :

- $(x+6)(x-6)$ On reconnaît l'identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ avec $a = x$ et $b = 6$.
 $(x+6)(x-6) = x^2 - 6^2 = x^2 - 36$.
- $(2x-5)(2x+5)$ On reconnaît l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ avec $a = 2x$ et $b = 5$.
 $(2x-5)(2x+5) = (2x)^2 - 5^2 = 4x^2 - 25$.

1.4.2 Résolution d'équations**Définition**

Une **équation** est une égalité qui contient une ou plusieurs variables (souvent appelées inconnues). Résoudre une équation, c'est trouver les valeurs des variables pour lesquelles l'égalité est vraie.

Point de méthode**Résoudre une équation du premier degré**

1. Regrouper tous les termes contenant l'inconnue d'un côté de l'égalité et les termes constants de l'autre côté.
2. Simplifier chaque côté.
3. Isoler l'inconnue en divisant par son coefficient.

Exemple commenté

Résoudre rapidement : $-3x = 12$.

- $-3x = 12 \quad x = \frac{12}{-3} \quad x = -4$.

Exemple commenté

Résoudre les équations suivantes :

$$\text{— } 4x - 8 = 7x + 4 \quad 4x - 7x = 4 + 8 \quad -3x = 12 \quad x = \frac{12}{-3} \quad x = -4.$$

$$\text{— } 5(7 - 2,2x) = 9 - 6x \quad 35 - 11x = 9 - 6x \quad -11x + 6x = 9 - 35 \quad -5x = -26 \quad x = \frac{-26}{-5} \\ x = 5,2.$$

Point de méthode

Résoudre une équation produit nul Un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins un des facteurs est nul. Si $(A)(B) = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.

Exemple commenté

Résoudre l'équation suivante : $(2,5x - 7)(8x - 9,6) = 0$. $(2,5x - 7)(8x - 9,6) = 0$ signifie que $2,5x - 7 = 0$ ou $8x - 9,6 = 0$.

$$\text{— Résolvons } 2,5x - 7 = 0 : 2,5x = 7 \quad x = \frac{7}{2,5} \quad x = 2,8.$$

$$\text{— Résolvons } 8x - 9,6 = 0 : 8x = 9,6 \quad x = \frac{9,6}{8} \quad x = 1,2.$$

Les solutions de l'équation sont $x = 2,8$ et $x = 1,2$.

Point de méthode

Résoudre une équation de la forme $x^2 = a$

— Si $a > 0$, l'équation a deux solutions : $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$.

— Si $a = 0$, l'équation a une seule solution : $x = 0$.

— Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution réelle.

Exemple commenté

Résoudre l'équation suivante : $x^2 = 20$. L'équation $x^2 = 20$ a deux solutions : $x = \sqrt{20}$ ou $x = -\sqrt{20}$. On peut simplifier $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$. Donc les solutions sont $x = 2\sqrt{5}$ et $x = -2\sqrt{5}$.

1.4.3 Résolution de problèmes avec le calcul littéral

Exemple commenté

Problème de rentabilité du récupérateur d'eau La facture d'eau d'un jardinier s'élève à 545 € par an. Il prévoit d'économiser 55 € par an en installant un récupérateur d'eau de pluie. Le récupérateur a coûté 199 € à l'achat et va nécessiter chaque année 13 € pour l'entretien (nettoyage, tuyau...). Au bout de combien d'années l'installation sera-t-elle rentable ?

Solution : Soit n le nombre d'années après l'installation du récupérateur.

1. Coût total sans récupérateur après n années : $545n$ €
2. Économies réalisées par an grâce au récupérateur : 55 €
3. Dépenses annuelles liées au récupérateur (entretien) : 13 €
4. Gain net annuel grâce au récupérateur : $55 - 13 = 42$ €
5. Coût initial du récupérateur : 199 €
6. Coût total avec récupérateur après n années : $199 + 545n - 42n$ (facture d'eau habituelle moins les économies nettes annuelles)
7. On cherche quand l'installation sera rentable, c'est-à-dire quand le coût total avec récupérateur sera inférieur ou égal au coût total sans récupérateur. Plus simplement, quand les économies accumulées (gain net annuel $\times$ nombre d'années) couvriront le coût initial d'achat. L'équation à résoudre est : $42n \geq 199$. $n \geq \frac{199}{42}$ $n \geq 4,738...$

Puisque n doit être un nombre entier d'années, l'installation sera rentable au bout de 5 ans.