

Grandeurs et Mesures

Ce chapitre aborde les notions de calcul avec des grandeurs mesurables, les conversions d'unités, et l'impact des transformations géométriques sur les figures. Il s'appuie sur le programme officiel de mathématiques de 3ème.

0.1 Calculer avec des grandeurs mesurables

Les élèves de 3ème doivent être capables d'effectuer des calculs avec différentes grandeurs (longueurs, aires, volumes, vitesses, débits, etc.) et d'exprimer les résultats dans les unités appropriées. Il est également essentiel de maîtriser les conversions d'unités, notamment pour les grandeurs composées, et de vérifier la cohérence des résultats.

0.1.1 Volumes de solides

Définition

Le volume est l'espace occupé par un corps. C'est une grandeur qui s'exprime en unités cubiques (m^3 , cm^3 , L, etc.).

Les élèves doivent savoir calculer le volume de solides étudiés au cours du cycle, y compris les assemblages de solides. Un cas particulier mentionné est le calcul du volume d'une boule.

Formules de volume (Rappels)

- Cube de côté c : $V = c^3$
- Parallélépipède rectangle (pavé droit) de dimensions L, l, h : $V = L \times l \times h$
- Cylindre de rayon de base r et de hauteur h : $V = \pi \times r^2 \times h$
- Cône de rayon de base r et de hauteur h : $V = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h$
- Pyramide d'aire de base B et de hauteur h : $V = \frac{1}{3} \times B \times h$
- Boule de rayon r : $V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$

Point de méthode

Pour calculer le volume d'assemblages de solides, décomposez la figure en solides élémentaires dont vous connaissez les formules de volume. Calculez le volume de chaque partie, puis additionnez ou soustrayez les volumes selon la configuration.

Exemple commenté

Calculons le volume d'un cylindre surmonté d'une demi-boule de même diamètre. Supposons que le cylindre a un rayon r et une hauteur h . Le rayon de la demi-boule est également r .

Étape 1 : Identifier les solides élémentaires et leurs dimensions. Le solide est composé d'un cylindre de rayon r et hauteur h , et d'une demi-boule de rayon r .

Étape 2 : Écrire les formules de volume pour chaque solide. Volume du cylindre : $V_{\text{cylindre}} = \pi r^2 h$ Volume d'une boule : $V_{\text{boule}} = \frac{4}{3} \pi r^3$ Volume de la demi-boule : $V_{\text{demi-boule}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3$

Étape 3 : Additionner les volumes des solides. Volume total $V_{\text{total}} = V_{\text{cylindre}} + V_{\text{demi-boule}} = \pi r^2 h + \frac{2}{3} \pi r^3$.

Étape 4 : Application numérique (avec des valeurs arbitraires pour l'exemple). Soit $r = 3$ cm et $h = 10$ cm. $V_{\text{cylindre}} = \pi \times 3^2 \times 10 = 90\pi$ cm³. $V_{\text{demi-boule}} = \frac{2}{3} \pi \times 3^3 = \frac{2}{3} \pi \times 27 = 18\pi$ cm³. $V_{\text{total}} = 90\pi + 18\pi = 108\pi$ cm³. En valeur approchée : $108\pi \approx 339.29$ cm³.

0.1.2 Grandeurs composées et conversions d'unités

Les grandeurs composées résultent de la combinaison de plusieurs grandeurs simples. La vitesse (distance/temps) et le débit (volume/temps) en sont des exemples courants.

Point de méthode

Pour résoudre un problème impliquant des grandeurs composées et des conversions d'unités :

1. Identifiez les grandeurs données et celles à calculer.
2. Assurez-vous que toutes les unités sont cohérentes. Si ce n'est pas le cas, effectuez les conversions nécessaires avant tout calcul.
3. Appliquez la formule appropriée.
4. Exprimez le résultat avec l'unité demandée ou l'unité adaptée.

Exemple commenté

Un conducteur met 1 s avant de commencer à freiner quand il voit un obstacle. Quelle distance parcourt-il pendant cette durée s'il roule à 80 km/h ?.

Étape 1 : Identifier les grandeurs. Temps de réaction $t = 1$ s. Vitesse $v = 80$ km/h. Distance d à trouver.

Étape 2 : Vérifier la cohérence des unités. Le temps est en secondes, la vitesse en kilomètres par heure. Il faut convertir la vitesse en mètres par seconde (unité cohérente avec le temps en secondes pour obtenir une distance en mètres). Rappel : 1 km = 1000 m, 1 h = 3600 s. $80 \text{ km/h} = \frac{80 \times 1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{80000}{3600} \text{ m/s} = \frac{800}{36} \text{ m/s} = \frac{200}{9} \text{ m/s}$.

Étape 3 : Appliquer la formule. La formule est $d = v \times t$. $d = \frac{200}{9} \text{ m/s} \times 1 \text{ s} = \frac{200}{9} \text{ m}$.

Étape 4 : Exprimer le résultat. La distance parcourue est d'environ 22.22 mètres.

Autre exemple commenté

Le débit moyen de la Seine sous le pont de l'Alma est 328 m³/s. Combien de litres d'eau sont-ils passés sous ce pont en 3 min ?.

Étape 1 : Identifier les grandeurs. Débit $D = 328$ m³/s. Durée $\Delta t = 3$ min. Volume V à trouver en litres.

Étape 2 : Vérifier la cohérence des unités et convertir. Le débit est en mètres cubes par seconde, la durée en minutes. Il faut convertir la durée en secondes. $\Delta t = 3 \text{ min} = 3 \times 60 \text{ s} = 180 \text{ s}$. On veut le volume en litres. Rappel : 1 m³ = 1000 L.

Étape 3 : Appliquer la formule. La formule est $V = D \times \Delta t$. $V = 328 \text{ m}^3/\text{s} \times 180 \text{ s} = 59040 \text{ m}^3$.

Étape 4 : Convertir le résultat en litres. $V = 59040 \text{ m}^3 = 59040 \times 1000 \text{ L} = 59\,040\,000 \text{ L}$.

Remarque Pédagogique : Il est crucial de faire oraliser les unités par les élèves pour s'assurer de leur compréhension des grandeurs physiques (durées en heures, minutes, secondes ; longueurs en mètres ; aires en mètres carrés ; volumes en mètres cubes ; vitesses en kilomètres par heure ou mètres par seconde ; débits en mètres cubes par seconde ou litres par heure).

0.2 Comprendre l'effet de quelques transformations sur les figures géométriques

Les transformations géométriques (symétries, rotations, translations, homothéties) permettent de déplacer ou de modifier la taille des figures. Il est important de comprendre leurs effets sur les grandeurs géométriques comme les longueurs, les aires et les volumes.

0.2.1 Propriétés de conservation des transformations

Propriété

- Les **symétries** (axiale et centrale), les **translations** et les **rotations** sont des isométries : elles conservent les longueurs, les angles, les aires et les volumes.
- L'**homothétie** de rapport k modifie les longueurs, les aires et les volumes.

Effets de l'homothétie

Propriété

Dans une homothétie de rapport k (où $k \neq 0$) :

- Les longueurs sont multipliées par $|k|$.
- Les aires sont multipliées par k^2 .
- Les volumes sont multipliés par $|k|^3$.

Point de méthode

Pour calculer des grandeurs géométriques après une homothétie :

1. Identifiez la grandeur initiale et le rapport de l'homothétie k .
2. Appliquez le facteur de proportionnalité approprié : $|k|$ pour les longueurs, k^2 pour les aires, $|k|^3$ pour les volumes.

Exemple commenté

Un carré a une aire de 9 cm^2 . On lui applique une homothétie de rapport $k = 3$. Quelle est l'aire du nouveau carré ?

Étape 1 : Identifier la grandeur initiale et le rapport. Aire initiale $A_{\text{initial}} = 9 \text{ cm}^2$. Rapport de l'homothétie $k = 3$.

Étape 2 : Appliquer le facteur de proportionnalité pour les aires. Les aires sont multipliées par k^2 . $k^2 = 3^2 = 9$. Aire finale $A_{\text{final}} = A_{\text{initial}} \times k^2 = 9 \text{ cm}^2 \times 9 = 81 \text{ cm}^2$.

Autre exemple commenté (Calcul de longueurs après homothétie)

Considérons une figure constituée de plusieurs carrés obtenus par homothétie. Si un carré initial a un côté de longueur c_1 et qu'un second carré est l'image du premier par une homothétie de rapport k , alors le côté du second carré c_2 est $c_2 = |k| \times c_1$.

Exemple : Si un carré a un côté de 2 cm et qu'il est transformé par une homothétie de rapport 2 , le nouveau carré aura un côté de $2 \times 2 = 4 \text{ cm}$.

Remarque Pédagogique : Il est important de bien distinguer les cas où les transformations conservent les grandeurs (isométries) et les cas où elles les modifient (homothétie). Insister sur la relation entre les rapports de longueurs, d'aires et de volumes pour l'homothétie (facteurs k , k^2 , $|k|^3$).