

Recueil d'exercices de réflexion en Statistiques et Probabilités

Classe de Seconde

Abstract

Ce recueil propose des exercices de réflexion et de modélisation en statistiques et probabilités, conçus pour la classe de seconde générale et technologique. L'objectif est de consolider les acquis du collège et de développer la capacité des élèves à analyser, argumenter et résoudre des problèmes dans des contextes variés, favorisant l'autonomie et la prise d'initiative. Aucune solution n'est fournie afin de stimuler le raisonnement personnel.

Introduction

La section "Statistiques et probabilités" du programme de mathématiques de seconde vise à renforcer la maîtrise de l'information chiffrée et à formaliser les notions élémentaires de probabilité. Ces exercices sont conçus pour aller au-delà de la simple application de formules, en encourageant une approche critique et une modélisation rigoureuse de situations issues de divers domaines. Ils nécessitent souvent la mobilisation de plusieurs compétences mathématiques simultanément.

Exercices de Réflexion : Statistiques et Probabilités

Partie 1 : Utiliser l'information chiffrée et statistique descriptive

Exercice 1 : Analyse d'évolutions successives

Une entreprise constate une baisse de son chiffre d'affaires de 15% en 2023. Pour tenter de relancer son activité, elle met en place de nouvelles stratégies marketing, ce qui lui permet d'enregistrer une hausse de 20% en 2024.

- L'entreprise a-t-elle retrouvé ou dépassé son chiffre d'affaires initial de 2022 ? Argumentez votre réponse.
- Quel devrait être le pourcentage d'augmentation en 2025 pour que le chiffre d'affaires de l'entreprise retrouve son niveau de 2022 ?
- Si, au lieu d'une baisse suivie d'une hausse, l'entreprise avait connu deux hausses successives, la situation serait-elle plus favorable ? Moins favorable ? Précisez votre raisonnement.

Exercice 2 : Comparaison de séries statistiques

Deux classes de seconde, la 2nde A et la 2nde B, ont obtenu les résultats suivants à un devoir commun de mathématiques (notes sur 20) :

- **2nde A** : Moyenne = 11,5 ; Écart-type = 3,2 ; Écart interquartile = 4.
 - **2nde B** : Moyenne = 12 ; Écart-type = 2,5 ; Écart interquartile = 2.
- Quelle classe semble avoir les meilleures performances globales ? Justifiez.
 - Dans quelle classe les notes sont-elles les plus homogènes ? Appuyez votre réponse sur les indicateurs de dispersion.
 - Un élève de 2nde A a obtenu la note de 15. Comment sa performance se situe-t-elle par rapport à la moyenne de sa classe, en tenant compte de l'écart type ?
 - Un élève de 2nde B a obtenu la note de 14. Comparez sa performance par rapport à la moyenne de sa classe, en tenant compte de l'écart type.
 - Proposez une interprétation de ces résultats pour le professeur.

Exercice 3 : Pourcentages et proportions

Dans un lycée, 60% des élèves sont des filles. Parmi les filles, 40% pratiquent un sport collectif. Parmi les garçons, 30% pratiquent un sport collectif.

- Quel est le pourcentage de filles pratiquant un sport collectif dans le lycée ?
- Quel est le pourcentage de garçons pratiquant un sport collectif dans le lycée ?
- Quel est le pourcentage total d'élèves pratiquant un sport collectif dans ce lycée ?
- Si l'on choisit un élève au hasard parmi ceux qui pratiquent un sport collectif, quelle est la probabilité que ce soit une fille ?
- Que se passerait-il si la proportion de garçons pratiquant un sport collectif augmentait ? Comment cela affecterait-il le pourcentage total d'élèves sportifs ?

Partie 2 : Modéliser le hasard, calculer des probabilités

Exercice 4 : Modélisation d'une expérience aléatoire

On dispose d'un sac contenant 10 boules indiscernables au toucher : 3 rouges, 2 vertes et 5 bleues. On tire successivement et sans remise deux boules du sac.

- Représentez la situation à l'aide d'un arbre pondéré ou d'un tableau.
- Quelle est la probabilité de tirer deux boules de la même couleur ?
- Quelle est la probabilité de tirer au moins une boule rouge ?
- Si la première boule tirée est rouge, quelle est la probabilité que la seconde boule soit bleue ?
- Comment cette modélisation changerait-elle si les tirages étaient effectués avec remise ? Quels seraient alors les impacts sur les probabilités calculées précédemment ?

Exercice 5 : Probabilités et jeu de société

Un jeu de société utilise un dé spécial à 6 faces dont les faces sont numérotées 1, 1, 2, 3, 3, 4. On lance ce dé une fois.

- Déterminez la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.
- Soit A l'événement "obtenir un nombre pair". Calculez $P(A)$.
- Soit B l'événement "obtenir un nombre supérieur ou égal à 3". Calculez $P(B)$.
- Calculez $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.
- Un joueur gagne s'il obtient un nombre supérieur ou égal à 3 OU s'il obtient un nombre pair. Le joueur a-t-il plus de 50% de chances de gagner ? Justifiez votre réponse.

Exercice 6 : Comprendre la loi des grands nombres

On souhaite simuler le lancer d'une pièce de monnaie équilibrée un grand nombre de fois. On considère que la probabilité d'obtenir "Pile" est $p = 0.5$.

- Expliquez avec vos propres mots ce que dit la "loi des grands nombres" dans ce contexte.
- Proposez un protocole expérimental (simulé) pour illustrer cette loi.
- Si vous effectuez 10 lancers, est-il certain d'obtenir 5 "Pile" et 5 "Face" ? Argumentez.
- Si vous effectuez 1000 lancers, pouvez-vous affirmer que la fréquence de "Pile" sera exactement 0.5 ? Expliquez.
- Comment l'observation de la stabilisation des fréquences permet-elle de construire un modèle probabiliste pour un phénomène réel dont on ne connaît pas la probabilité *a priori* (par exemple, le lancer d'une punaise) ?

Partie 3 : Échantillonnage et Fluctuations

Exercice 7 : Sondage et intervalle de fluctuation

Un candidat à une élection affirme que 60% des électeurs le soutiennent. Un institut de sondage réalise une enquête auprès d'un échantillon aléatoire de 1000 personnes.

- Si l'affirmation du candidat est vraie, dans quel intervalle peut-on s'attendre à ce que la fréquence de soutien au candidat se situe, à $1/\sqrt{n}$ près ?
- Le sondage révèle que 560 personnes sur 1000 soutiennent le candidat. La fréquence observée est-elle cohérente avec l'affirmation du candidat, au seuil de $1/\sqrt{n}$?
- Expliquez la notion de "fluctuation d'échantillonnage" dans ce contexte.

-
- d) Si l'institut de sondage avait interrogé 4000 personnes, comment cela aurait-il impacté la taille de l'intervalle de fluctuation ? Pourquoi est-ce important ?
 - e) Un autre candidat affirme qu'il est soutenu par seulement 45% des électeurs. Est-ce que les résultats de ce même sondage (560 sur 1000) permettent de remettre en question son affirmation ? Justifiez.

Exercice 8 : Simulation et estimation

On lance un dé pipé (non équilibré) dont on ignore la probabilité d'obtenir chaque face. Pour estimer la probabilité d'obtenir la face 6, on effectue une série de lancers.

- a) Expliquez comment la fréquence d'apparition de la face 6 sur un grand nombre de lancers peut servir d'estimation de la probabilité d'obtenir cette face.
- b) Proposez un algorithme, en langage naturel, qui simulerait N lancers de ce dé et renverrait la fréquence de la face 6.
- c) Si vous obtenez une fréquence de 0.2 pour la face 6 après 100 lancers, que pouvez-vous en déduire sur la probabilité réelle de cette face ?
- d) Comment pourriez-vous améliorer la précision de votre estimation ?
- e) Discutez des limites de l'estimation d'une probabilité par la fréquence observée. Quand cette méthode est-elle pertinente et quand ne l'est-elle pas ?