

Mathématiques - Classe de Seconde

Polycopié de cours

Année scolaire 2025-2026

Contents

1	Nombres et calculs	2
1.1	Manipuler les nombres réels	2
1.1.1	Ensembles de nombres	2
1.1.2	Intervalles et valeur absolue	3
1.2	Utiliser les notions de multiple, diviseur et de nombre premier	4
1.3	Utiliser le calcul littéral	5
1.3.1	Règles de calcul et identités remarquables	6
1.3.2	Inégalités et résolution d'inéquations	7
1.4	Quelques notions supplémentaires	8
1.4.1	Divisibilité	8
1.4.2	Arrondi et Chiffres Significatifs	8
1.4.3	Modélisation et Résolution de Problèmes	9
1.5	Historique des nombres et du calcul littéral	10
1.5.1	La notion de nombre	10
1.5.2	L'apport du calcul littéral	10

1 Nombres et calculs

Cette section prolonge le thème "Nombres et calculs" du cycle 4. Ses objectifs principaux sont d'approfondir la connaissance des différents types et ensembles de nombres, de développer la pratique du calcul numérique et algébrique, de travailler sur les inégalités, et de résoudre des problèmes modélisés par des équations ou inéquations du premier degré.

1.1 Manipuler les nombres réels

Les élèves appréhendent les nombres réels comme les abscisses des points sur une droite graduée, et plus généralement comme des nombres permettant de mesurer des grandeurs. Ils apprennent à les comparer et à les encadrer par des nombres décimaux ou rationnels, tout en comprenant l'existence de nombres irrationnels. Il est important de noter que les calculatrices et les logiciels fournissent des calculs approchés.

1.1.1 Ensembles de nombres

Définition

- L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels regroupe les nombres $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs comprend les entiers naturels et leurs opposés : $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est constitué des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.
- L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.
- L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels inclut tous les nombres rationnels et irrationnels. Les nombres irrationnels ne peuvent pas être exprimés comme une fraction de deux entiers, par exemple $\sqrt{2}$ et π .

Point de méthode

Démontrer qu'un nombre n'est pas décimal : Pour montrer qu'un nombre rationnel n'est pas décimal, on peut démontrer que sa forme irréductible ne peut pas s'écrire avec une puissance de 10 au dénominateur. **Exemple :** Démontrons que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal. Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$, où a est un entier relatif et n est un entier naturel. Supposons que $\frac{1}{3}$ soit un décimal. Alors $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$ pour certains entiers a et $n \geq 0$. Ceci implique $3a = 10^n$. Or, $10^n = (2 \times 5)^n = 2^n \times 5^n$. Donc, $3a = 2^n \times 5^n$. Cette égalité signifie que 3 est un diviseur de $2^n \times 5^n$. Cependant, 3 n'est ni un diviseur de 2, ni un diviseur de 5. Par conséquent, 3 ne peut pas être un diviseur de $2^n \times 5^n$. Il y a donc une contradiction. Notre supposition initiale est fausse. Donc, $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Point de méthode

Démontrer qu'un nombre est irrationnel : Pour montrer qu'un nombre est irrationnel, on utilise souvent un raisonnement par l'absurde. **Exemple :** Démontrons que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Alors $\sqrt{2}$ peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers naturels, $q \neq 0$, et p et q n'ont pas de facteurs premiers en commun (la fraction est irréductible). $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ Élevons les deux côtés au carré : $2 = \frac{p^2}{q^2}$ $2q^2 = p^2$ Cette égalité signifie que p^2 est un nombre pair. Si p^2 est pair, alors p doit être pair (car si p était impair, p^2 serait impair). On peut donc écrire $p = 2k$ pour un certain entier k . Substituons $p = 2k$ dans l'équation $2q^2 = p^2$: $2q^2 = (2k)^2$ $2q^2 = 4k^2$ Divisons par 2 : $q^2 = 2k^2$ Cette égalité signifie que q^2 est un nombre pair. Si q^2 est pair, alors q doit être pair. Nous avons établi que p est pair et q est pair. Cela signifie que p et q ont 2 comme facteur commun. Cependant, cela contredit notre hypothèse de départ selon laquelle la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible. Puisque notre hypothèse mène à une contradiction, elle doit être fausse. Par conséquent, $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel, il est irrationnel.

1.1.2 Intervalles et valeur absolue

Définition

Un intervalle de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble de nombres réels qui "se suivent" sans interruption. Les bornes d'un intervalle peuvent être des nombres réels, $+\infty$ ou $-\infty$.

- Intervalle fermé : $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- Intervalle ouvert : $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- Intervalle semi-ouvert/fermé : $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- Intervalles non bornés : $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ $] - \infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ $] - \infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ $] - \infty, +\infty[= \mathbb{R}$

Définition

La valeur absolue d'un nombre réel x , notée $|x|$, est sa distance à zéro sur la droite numérique.

- Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$.
- Si $x < 0$, alors $|x| = -x$.

La distance entre deux nombres réels a et b est $|a - b|$.

Propriété

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$:

- L'inégalité $|x - a| \leq r$ caractérise l'intervalle fermé $[a - r, a + r]$.
- L'inégalité $|x - a| < r$ caractérise l'intervalle ouvert $]a - r, a + r[$.

Le point a est le centre de l'intervalle, et r est son rayon.

Point de méthode

Représenter un intervalle et déterminer l'appartenance d'un nombre :

- Pour représenter un intervalle comme $[2, 5]$ sur une droite numérique, tracez une droite, placez les nombres 2 et 5, et colorez le segment entre eux. Utilisez des crochets tournés vers l'intérieur pour les bornes incluses, et vers l'extérieur pour les bornes exclues.
- Pour déterminer si un nombre réel appartient à un intervalle donné, vérifiez s'il satisfait les inégalités définissant l'intervalle. **Exemple :** Le nombre 3,5 appartient-il à l'intervalle $] -\infty, 4[$? Oui, car $3,5 < 4$. Le nombre 5 appartient-il à $[2, 5[$? Non, car l'intervalle est ouvert en 5.

Point de méthode

Donner un encadrement décimal d'un nombre réel : Un encadrement décimal d'un nombre réel x à 10^{-n} près signifie trouver deux nombres décimaux a et b tels que $a \leq x \leq b$ et $b - a = 10^{-n}$.
Exemple : Donner un encadrement de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près. On sait que $1,41^2 = 1,9881$ et $1,42^2 = 2,0164$. Donc $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$. C'est un encadrement d'amplitude $1,42 - 1,41 = 0,01 = 10^{-2}$.

Point de méthode

Déterminer un encadrement par balayage (algorithme) : Pour déterminer un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-n} par balayage :

1. Initialiser $a = 0$, $b =$ valeur maximale souhaitée (par exemple 2 pour $\sqrt{2}$).
2. Choisir une précision $p = 10^{-n}$.
3. Tant que $(b - a) > p$:
 - (a) Calculer le milieu $m = \frac{a+b}{2}$.
 - (b) Si $m^2 < 2$, alors $a = m$.
 - (c) Sinon ($m^2 \geq 2$), alors $b = m$.
4. L'encadrement est $[a, b]$.

1.2 Utiliser les notions de multiple, diviseur et de nombre premier

Ces notions, déjà abordées au collège, sont consolidées en seconde, notamment à travers la pratique du calcul sur les fractions.

Définition

- Un entier naturel a est un **multiple** d'un entier naturel b s'il existe un entier naturel k tel que $a = k \times b$.
- Un entier naturel b est un **diviseur** d'un entier naturel a si a est un multiple de b .
- Un nombre entier est **pair** s'il est un multiple de 2. Il peut s'écrire sous la forme $2k$, où $k \in \mathbb{Z}$.
- Un nombre entier est **impair** s'il n'est pas pair. Il peut s'écrire sous la forme $2k + 1$, où $k \in \mathbb{Z}$.
- Un **nombre premier** est un entier naturel supérieur à 1 qui n'a que deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

Propriété

- La somme de deux multiples d'un même nombre a est un multiple de a .
- Le carré d'un nombre impair est impair.

Point de méthode

Démonstrations des propriétés sur les multiples et nombres impairs :

- **Pour une valeur numérique de a , la somme de deux multiples de a est un multiple de a .** Soient m_1 et m_2 deux multiples de a . Alors il existe des entiers k_1 et k_2 tels que $m_1 = k_1a$ et $m_2 = k_2a$. La somme $m_1 + m_2 = k_1a + k_2a = (k_1 + k_2)a$. Puisque $k_1 + k_2$ est un entier, $m_1 + m_2$ est un multiple de a .
- **Le carré d'un nombre impair est impair.** Soit n un nombre impair. Alors il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$. Calculons le carré de n : $n^2 = (2k + 1)^2 = (2k)^2 + 2(2k)(1) + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Puisque $2k^2 + 2k$ est un entier, n^2 est de la forme $2 \times (\text{entier}) + 1$, ce qui signifie que n^2 est un nombre impair.

Point de méthode

Algorithmes relatifs aux multiples, diviseurs et nombres premiers :

- **Déterminer si un entier naturel a est multiple d'un entier naturel b :** On peut utiliser l'opérateur modulo (%). Si $a \% b == 0$, alors a est un multiple de b .
- **Pour des entiers a et b donnés, déterminer le plus grand multiple de a inférieur ou égal à b :** On peut calculer $(b // a) \times a$, où $//$ représente la division entière.
- **Déterminer si un entier naturel est premier :** Pour un entier $n > 1$, on peut tester la divisibilité par tous les entiers de 2 jusqu'à $\sqrt{n}$. S'il n'est divisible par aucun d'eux, il est premier.

1.3 Utiliser le calcul littéral

L'objectif est de mettre en évidence la puissance du calcul littéral comme outil de résolution de problèmes. Les élèves doivent être confrontés à des situations où une modélisation faisant intervenir variables, expressions algébriques, équations ou inéquations est nécessaire.

1.3.1 Règles de calcul et identités remarquables

Propriété

Règles sur les puissances entières relatives : Pour $a, b \in \mathbb{R}^*$ et $n, m \in \mathbb{Z}$:

- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $(a^n)^m = a^{n \times m}$
- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Propriété

Règles sur les racines carrées : Pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$:

- $\sqrt{a^2} = |a|$. Par exemple, $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$.
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ pour $b > 0$.

Propriété

Identités remarquables : Ces identités doivent être utilisées dans les deux sens (développement et factorisation).

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

Point de méthode

Calculs sur les expressions algébriques :

- **Développer** une expression : transformer un produit en une somme. **Exemple** : Développer $(2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(3) + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$.
- **Factoriser** une expression : transformer une somme en un produit. **Exemple** : Factoriser $9x^2 - 16 = (3x)^2 - 4^2 = (3x - 4)(3x + 4)$.
- **Simplifier** des expressions fractionnaires : factoriser le numérateur et le dénominateur pour trouver des facteurs communs. **Exemple** : Simplifier $\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2$ (pour $x \neq 2$).

1.3.2 Inégalités et résolution d'inéquations

Propriété

Règles sur les inégalités :

- On peut additionner ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité sans changer son sens. Si $a < b$, alors $a + c < b + c$.
- On peut multiplier ou diviser par un nombre positif sans changer le sens de l'inégalité. Si $a < b$ et $c > 0$, alors $ac < bc$.
- On doit changer le sens de l'inégalité si on multiplie ou divise par un nombre négatif. Si $a < b$ et $c < 0$, alors $ac > bc$.

Définition

- Une **équation** est une égalité qui contient une ou plusieurs variables (appelées inconnues). Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs des inconnues pour lesquelles l'égalité est vraie.
- Une **inéquation** est une inégalité qui contient une ou plusieurs variables. Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs des inconnues pour lesquelles l'inégalité est vraie. L'ensemble des solutions est souvent un intervalle ou une réunion d'intervalles.

Point de méthode

Résoudre une inéquation du premier degré : Pour résoudre une inéquation du type $ax + b < 0$ (ou $>$, $\leq$, $\geq$), on isole la variable x en respectant les règles des inégalités. **Exemple :** Résoudre l'inéquation $3x - 5 < x + 1$. $3x - x < 1 + 5$ $2x < 6$ $x < \frac{6}{2}$ $x < 3$ L'ensemble des solutions est l'intervalle $] -\infty, 3[$.

Point de méthode

Choisir la forme adaptée d'une expression :

- La **forme développée et réduite** est utile pour calculer la valeur d'une expression pour un x donné, ou pour identifier les coefficients d'un polynôme.
- La **forme factorisée** est essentielle pour résoudre des équations produit-nul, étudier le signe d'une expression, ou simplifier des fractions algébriques.

Propriété

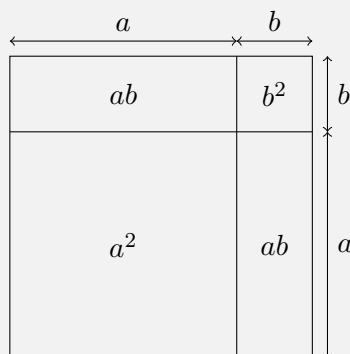
Inégalité entre les sommes de racines carrées : Pour tous réels positifs a et b , on a $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$. **Démonstration :** Puisque $a \geq 0$ et $b \geq 0$, $\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ sont positifs. On peut comparer leurs carrés. $(\sqrt{a+b})^2 = a + b$. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b = a + b + 2\sqrt{ab}$. Puisque $a > 0$ et $b > 0$, $\sqrt{ab} > 0$, donc $2\sqrt{ab} > 0$. Par conséquent, $a + b < a + b + 2\sqrt{ab}$. Ainsi, $(\sqrt{a+b})^2 < (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$. Comme les deux expressions sont positives, on peut prendre la racine carrée : $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Point de méthode

Illustration géométrique de $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$: Considérons un carré de côté $(a + b)$. Son aire est $(a + b)^2$. Ce carré peut être décomposé en :

- Un carré de côté a , d'aire a^2 .
- Un carré de côté b , d'aire b^2 .
- Deux rectangles de côtés a et b , chacun d'aire ab .

L'aire totale du grand carré est donc la somme des aires de ces quatre figures : $a^2 + b^2 + ab + ab = a^2 + 2ab + b^2$.



1.4 Quelques notions supplémentaires

1.4.1 Divisibilité

Définition

- Un nombre pair est un entier de la forme $2k$ où k est un entier.
- Un nombre impair est un entier de la forme $2k + 1$ où k est un entier.

1.4.2 Arrondi et Chiffres Significatifs

Point de méthode

Arrondir en donnant le nombre de chiffres significatifs adapté à la situation : Le nombre de chiffres significatifs d'une valeur indique la précision de cette valeur. **Exemple :** Si on mesure une longueur avec une règle graduée au millimètre près, une mesure de 12,3 cm a 3 chiffres significatifs. Si on arrondit un résultat de calcul à partir de cette mesure, il est pertinent de le faire avec le même nombre de chiffres significatifs.

1.4.3 Modélisation et Résolution de Problèmes

Point de méthode

Modéliser un problème par une équation ou une inéquation :

1. **Identifier les inconnues** : Désigner les quantités à trouver par des variables (souvent x).
2. **Traduire l'énoncé en langage mathématique** : Établir des relations entre les quantités connues et les inconnues pour former une équation ou une inéquation.
3. **Résoudre l'équation/inéquation**.
4. **Interpréter le résultat** dans le contexte du problème.

Exemple : Un téléphone coûte 250 € et on bénéficie d'une réduction de 15%. Quel est le nouveau prix ? Soit P le prix initial. Soit R la réduction. Soit P_{final} le prix final. $R = 0,15 \times P = 0,15 \times 250 = 37,50$ €. $P_{final} = P - R = 250 - 37,50 = 212,50$ €. Le nouveau prix est 212,50 €.

1.5 Historique des nombres et du calcul littéral

L'histoire des mathématiques éclaire le sens et l'importance des concepts de "Nombres et calculs".

1.5.1 La notion de nombre

La notion de nombre, bien que familière, n'est pas triviale. Un exemple marquant est la "crise des irrationnels" chez les mathématiciens grecs. La découverte que des longueurs simples, comme la diagonale d'un carré de côté 1 ($\sqrt{2}$), ne pouvaient pas être exprimées comme un rapport de deux entiers, a profondément bouleversé leur vision du monde mathématique. Cette distinction est également pertinente avec l'avènement des calculatrices qui travaillent avec des approximations des nombres réels.

1.5.2 L'apport du calcul littéral

Le calcul littéral a permis un gain considérable en efficacité et en généralité dans la résolution de problèmes. L'élaboration progressive de symbolismes efficaces au cours des siècles a été cruciale pour le développement d'une grande partie des mathématiques. Des auteurs comme Diophante, Euclide, Al-Khwarizmi, Fibonacci, Viète, Fermat ou Descartes ont chacun apporté leur pierre à cette construction, souvent avec une visée algorithmique dans leurs méthodes. L'étude de leurs textes peut ainsi clarifier le sens de certaines notions et montrer comment les méthodes anciennes peuvent être transformées en algorithmes.