

Recueil d'exercices de réflexion - Seconde Générale et Technologique

Nombres et calculs

Ce recueil d'exercices est conçu pour stimuler votre esprit critique, votre autonomie et votre capacité à modéliser des situations mathématiques. Les problèmes proposés sont ouverts, encourageant la prise d'initiative et la mobilisation de plusieurs notions du programme de "Nombres et calculs" de Seconde. Aucune solution n'est fournie, afin de favoriser une démarche de recherche personnelle et approfondie.

I. Manipuler les nombres réels

1. Le mystère des nombres

- Considérez la droite numérique réelle. Expliquez en quoi la "densité" des nombres rationnels est différente de celle des nombres irrationnels. Donnez des exemples concrets pour illustrer votre propos.
- Peut-on toujours trouver un nombre irrationnel entre deux nombres rationnels distincts ? Justifiez votre réponse.
- Peut-on toujours trouver un nombre rationnel entre deux nombres irrationnels distincts ? Justifiez votre réponse.

2. Encadrements et approximations

Un agriculteur possède un champ carré dont l'aire est de 1500 m^2 . Il souhaite clôturer ce champ.

- Donnez un encadrement de la longueur du côté de ce champ à 1 cm près. Expliquez votre démarche.
- Quelle est la longueur minimale de clôture qu'il doit acheter ? Justifiez votre réponse en expliquant le nombre de chiffres significatifs que vous choisissez et pourquoi.
- Son voisin affirme que la longueur du côté est un nombre décimal. A-t-il raison ? Démontrez votre réponse.

3. Distance et intervalles

Un point M d'abscisse x est situé sur une droite numérique.

- Définissez précisément la distance entre deux nombres réels a et b .
- Caractérisez l'ensemble des points M dont l'abscisse x vérifie la condition $|x - 3| \leq 2$. Représentez cet ensemble sur une droite numérique et exprimez-le sous forme d'intervalle.
- Proposez une situation concrète (issue de la vie quotidienne ou d'une autre discipline) qui pourrait être modélisée par un intervalle de la forme $[a - r, a + r]$ et son inégalité correspondante.

4. Algorithme de balayage

On cherche à encadrer $\sqrt{7}$ avec une précision de 10^{-2} à l'aide d'un algorithme de balayage.

- Décrivez en langage naturel l'algorithme que vous utiliseriez pour trouver un encadrement de $\sqrt{7}$ d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-2} .
- Expliquez comment la notion de "nombre de la calculatrice" peut parfois être trompeuse dans ce type d'approximation.

II. Utiliser les notions de multiple, diviseur et de nombre premier

1. Nombres pairs et impairs

- Démontrez que la somme de deux nombres impairs est toujours un nombre pair.
- Démontrez que le produit de deux nombres impairs est toujours un nombre impair.
- Un élève affirme que le carré d'un nombre impair est impair. Est-ce vrai ? Démontrez cette proposition.

2. Problèmes de pavage

Une pièce rectangulaire mesure 4,20 m sur 3,60 m. On souhaite la paver avec des carreaux carrés identiques, sans coupe.

- Quelle est la taille maximale possible pour les côtés d'un carreau ?
- Combien de carreaux de cette taille faudra-t-il pour paver la pièce ?
- Si l'on souhaite utiliser des carreaux de 20 cm de côté, combien en faudra-t-il ? Que se passe-t-il si on ne peut pas les couper ?

3. Nombres premiers

- Expliquez l'importance des nombres premiers en mathématiques. Donnez des exemples de leur utilisation (hors de ce chapitre).
- Écrivez un algorithme permettant de déterminer si un entier naturel donné est un nombre premier.
- Le crible d'Ératosthène permet de trouver les nombres premiers jusqu'à une certaine limite. Expliquez son principe et pourquoi il est efficace.

III. Utiliser le calcul littéral

1. Expressions algébriques et optimisation

Un champ rectangulaire a pour périmètre 100 mètres. On souhaite maximiser son aire.

- Modélisez ce problème à l'aide d'une expression algébrique. Expliquez les variables que vous utilisez.
- Sans utiliser de notions de fonctions au-delà de celles vues au collège (fonctions affines), proposez une méthode pour trouver les dimensions du champ qui maximisent son aire.
- Un autre champ a une aire de 600 m². Exprimez une des dimensions en fonction de l'autre. Si une des dimensions est L , quelle est l'expression de l'autre ?

2. Inégalités et encadrements

Soient x et y deux nombres réels tels que $2 \leq x \leq 5$ et $-3 \leq y \leq -1$.

- Donnez un encadrement de $x + y$. Démontrez comment vous obtenez cet encadrement.
- Donnez un encadrement de $x - y$.
- Donnez un encadrement de $x \times y$. Expliquez votre raisonnement.
- Est-il possible d'encadrer $\frac{x}{y}$? Si oui, faites-le. Sinon, expliquez pourquoi.

3. Puissances et racines carrées

- Simplifiez l'expression $\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{27}$.
- Démontrez que pour tous réels positifs a et b , on a $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
- Un élève prétend que $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ pour tous réels positifs a et b . À l'aide d'un contre-exemple, montrez que cette proposition est fausse.
- Démontrez que si a et b sont des réels strictement positifs, alors $\sqrt{a + b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Vous pouvez utiliser un raisonnement par l'absurde si vous le souhaitez.

4. Identités remarquables et factorisation

- Soit $A = (3x - 2)^2 - (x + 1)^2$. Développez et réduisez A .
- Factorisez l'expression A .
- Résolvez l'équation $A = 0$. Expliquez les étapes de votre résolution.
- Proposez un problème géométrique dont la résolution amènerait à utiliser une identité remarquable pour calculer une aire ou une longueur.

IV. Problèmes transversaux

1. La spirale d'Archimède

Imaginez que vous tracez une spirale où la distance au centre augmente proportionnellement à l'angle balayé. Bien que la spirale d'Archimède soit une courbe continue, nous allons l'approximer.

- Si chaque tour de spirale augmente le rayon de 1 unité, et que le rayon initial est de 0, quelle est la distance au centre après 3 tours ?
- Proposez un moyen de représenter les points de cette spirale à l'aide de coordonnées et des nombres réels.
- Discutez de la différence entre un "nombre réel" et un "nombre de la calculatrice" lorsque vous travaillez avec des grandeurs comme les longueurs ou les angles dans ce contexte.

2. Le jeu des sommes et des produits

Deux nombres entiers naturels ont une somme de 15 et un produit de 54.

- Sans résoudre directement une équation du second degré (non au programme de Seconde), expliquez comment vous pourriez trouver ces deux nombres par tâtonnement et raisonnement.
- Si on ne connaît pas la somme, mais on sait que l'un est le double de l'autre et que leur produit est 72. Comment trouveriez-vous ces deux nombres ?
- En quoi ce type de problème mobilise-t-il à la fois le calcul numérique et le calcul littéral ?

3. Construction de segments

- À l'aide d'un segment de longueur 1, expliquez comment vous pourriez construire géométriquement un segment de longueur $\sqrt{5}$.
- Une fois le segment de longueur $\sqrt{5}$ construit, comment pourriez-vous en déduire la construction d'un segment de longueur $\sqrt{20}$?
- Ce type de construction fait le lien entre quelles parties du programme ?