

Polycopié de Mathématiques - Seconde Générale et Technologique

Chapitre : Géométrie

Juin 2025

Contents

1	Introduction à la Géométrie	2
1.1	Objectifs de la partie Géométrie	2
1.2	Importance des outils numériques	2
2	Manipuler les vecteurs du plan	2
2.1	Vecteurs : Définitions et Opérations	2
2.2	Coordonnées d'un vecteur dans un repère orthonormé	3
2.3	Colinéarité de deux vecteurs	5
2.4	Applications de la colinéarité : Alignement et parallélisme	5
3	Résoudre des problèmes de géométrie	6
3.1	Projeté orthogonal	6
3.2	Calculs de longueurs, angles, aires et volumes	7
4	Représenter et caractériser les droites du plan	8
4.1	Équations de droite	8
4.2	Utilisation des équations de droite	10

1 Introduction à la Géométrie

La géométrie en classe de seconde vise à consolider les notions vues au collège et à introduire de nouveaux outils, notamment les vecteurs, pour résoudre des problèmes de manière plus efficace. Elle permet également d'établir des liens entre la géométrie, les nombres, le calcul algébrique et les fonctions grâce à la géométrie repérée.

1.1 Objectifs de la partie Géométrie

Les objectifs principaux de cette partie sont les suivants:

- Consolider et prolonger l'étude des configurations géométriques abordées au collège.
- Introduire les vecteurs du plan comme un outil pour étudier des problèmes de mathématiques et d'autres disciplines, en particulier la physique.
- Poursuivre l'étude de la géométrie repérée, en reliant nombres, calculs algébriques, fonctions et géométrie.
- Introduire la notion d'ensemble de points du plan décrit par une équation, en explicitant le cas des équations de droites.

1.2 Importance des outils numériques

L'utilisation de logiciels de géométrie dynamique est encouragée pour favoriser l'autonomie des élèves et leur prise d'initiative dans la résolution de problèmes. Des figures variées (à main levée, schémas, figures soignées) doivent être utilisées.

2 Manipuler les vecteurs du plan

La notion de vecteur est introduite en seconde en s'appuyant sur la notion de translation vue au cycle 4. Les vecteurs sont un outil puissant pour les démonstrations en géométrie et la modélisation en physique.

2.1 Vecteurs : Définitions et Opérations

Définition

Un **vecteur** $\vec{MM'}$ est associé à la translation qui transforme le point M en le point M' . Il est caractérisé par sa direction, son sens et sa norme (ou longueur).

Définition

Deux vecteurs sont **égaux** s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

Définition

Le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$, est le vecteur dont la norme est nulle. Il n'a ni direction ni sens défini.

Propriété

La **somme de deux vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ peut être construite géométriquement en enchaînant les translations qu'ils représentent.

Relation de Chasles : Pour trois points A , B et C du plan, on a $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.

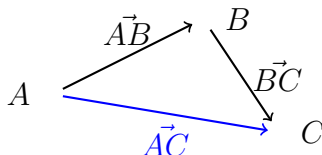


Illustration de la relation de Chasles : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

Définition

Le **produit d'un vecteur** $\vec{u}$ par un nombre réel k est un vecteur noté $k\vec{u}$.

- Si $k > 0$, $k\vec{u}$ a même direction et même sens que $\vec{u}$, et sa norme est k fois la norme de $\vec{u}$.
- If $k < 0$, $k\vec{u}$ a même direction que $\vec{u}$, mais de sens opposé, et sa norme est $|k|$ fois la norme de $\vec{u}$.
- Si $k = 0$, $k\vec{u} = \vec{0}$.

2.2 Coordonnées d'un vecteur dans un repère orthonormé

Définition

Dans un **repère orthonormé** $(O; \vec{i}, \vec{j})$, tout vecteur $\vec{u}$ du plan peut s'écrire de manière unique sous la forme $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, où (x, y) sont les **coordonnées** du vecteur $\vec{u}$. On note alors $\vec{u}(x; y)$ ou $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Propriété

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points dans un repère orthonormé. Les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$ sont $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

Point de méthode

Calcul des coordonnées d'un vecteur Pour calculer les coordonnées d'un vecteur $\vec{AB}$ à partir des coordonnées de ses points A et B :

1. Soustraire l'abscisse du point de départ à l'abscisse du point d'arrivée : $x_B - x_A$.
2. Soustraire l'ordonnée du point de départ à l'ordonnée du point d'arrivée : $y_B - y_A$.

Exemple commenté : Soient les points $A(1; -2)$ et $B(4; 3)$. Déterminons les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$.

- Abscisse de $\vec{AB}$: $x_B - x_A = 4 - 1 = 3$.

- Ordonnée de $\vec{AB}$: $y_B - y_A = 3 - (-2) = 3 + 2 = 5$.

Donc, les coordonnées de $\vec{AB}$ sont $(3; 5)$.

Propriété

La **norme** (ou longueur) d'un vecteur $\vec{u}(x; y)$ dans un repère orthonormé est donnée par la formule $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Propriété

La **distance entre deux points** $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ est la norme du vecteur $\vec{AB}$, soit $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Point de méthode

Calcul de la distance entre deux points Pour calculer la distance AB entre deux points A et B :

1. Calculer la différence des abscisses : $x_B - x_A$.
2. Calculer la différence des ordonnées : $y_B - y_A$.
3. Mettre ces différences au carré et les additionner.
4. Prendre la racine carrée du résultat.

Exemple commenté : Calculons la distance AB avec $A(1; -2)$ et $B(4; 3)$. $AB = \sqrt{(4 - 1)^2 + (3 - (-2))^2} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$. La distance AB est $\sqrt{34}$.

Propriété

Les **coordonnées du milieu** M d'un segment $[AB]$ avec $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

Point de méthode

Calcul des coordonnées du milieu d'un segment Pour trouver le milieu d'un segment:

1. Additionner les abscisses des deux points et diviser par 2.
2. Additionner les ordonnées des deux points et diviser par 2.

Exemple commenté : Déterminons le milieu M du segment $[AB]$ avec $A(1; -2)$ et $B(4; 3)$.

- Abscisse de M : $\frac{1+4}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$.
- Ordonnée de M : $\frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$.

Les coordonnées du milieu M sont $(2.5; 0.5)$.

2.3 Colinéarité de deux vecteurs

Définition

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ (ou $\vec{v} = k\vec{u}$). Géométriquement, cela signifie que les vecteurs ont la même direction.

Propriété

Dans un repère orthonormé, soient $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs. Le **déterminant** de ces deux vecteurs, noté $\det(\vec{u}, \vec{v})$, est $xy' - yx'$.

Théorème

Deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont **colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul**, c'est-à-dire si $xy' - yx' = 0$.

Point de méthode

Tester la colinéarité de deux vecteurs Pour vérifier si deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont colinéaires:

1. Calculer le déterminant $xy' - yx'$.
2. Si le résultat est 0, les vecteurs sont colinéaires. Sinon, ils ne le sont pas.

Exemple commenté : Soient $\vec{u}(2; 3)$ et $\vec{v}(4; 6)$. Sont-ils colinéaires ? Calculons le déterminant : $(2 \times 6) - (3 \times 4) = 12 - 12 = 0$. Puisque le déterminant est nul, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. On peut d'ailleurs noter que $\vec{v} = 2\vec{u}$.

2.4 Applications de la colinéarité : Alignement et parallélisme

Propriété

Alignement de trois points : Trois points A , B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.

Point de méthode

Vérifier l'alignement de trois points Pour vérifier si trois points A , B , C sont alignés:

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
2. Tester la colinéarité de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ en calculant leur déterminant.
3. Si le déterminant est nul, les points sont alignés.

Exemple commenté : Soient les points $A(1; 1)$, $B(3; 4)$ et $C(5; 7)$. Sont-ils alignés ?

- Coordonnées de $\vec{AB}$: $(3 - 1; 4 - 1) = (2; 3)$.
- Coordonnées de $\vec{AC}$: $(5 - 1; 7 - 1) = (4; 6)$.

- Déterminant de $(\vec{AB}, \vec{AC})$: $(2 \times 6) - (3 \times 4) = 12 - 12 = 0$.

Puisque le déterminant est nul, les points A , B et C sont alignés.

Propriété

Parallélisme de deux droites : Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.

Point de méthode

Vérifier le parallélisme de deux droites Pour vérifier si deux droites (AB) et (CD) sont parallèles :

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$.
2. Tester la colinéarité de $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ en calculant leur déterminant.
3. Si le déterminant est nul, les droites sont parallèles.

Exemple commenté : Soient les points $A(0;0)$, $B(1;2)$, $C(2;1)$ et $D(4;5)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

- Coordonnées de $\vec{AB}$: $(1 - 0; 2 - 0) = (1; 2)$.
- Coordonnées de $\vec{CD}$: $(4 - 2; 5 - 1) = (2; 4)$.
- Déterminant de $(\vec{AB}, \vec{CD})$: $(1 \times 4) - (2 \times 2) = 4 - 4 = 0$.

Puisque le déterminant est nul, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

3 Résoudre des problèmes de géométrie

Cette section aborde la résolution de problèmes géométriques en utilisant les outils vus précédemment, y compris le concept de projeté orthogonal.

3.1 Projeté orthogonal

Définition

Le **projeté orthogonal** d'un point M sur une droite Δ est le point H de la droite Δ tel que la droite (MH) est perpendiculaire à la droite Δ .

Propriété

Le projeté orthogonal du point M sur une droite Δ est le point de la droite Δ le plus proche du point M .

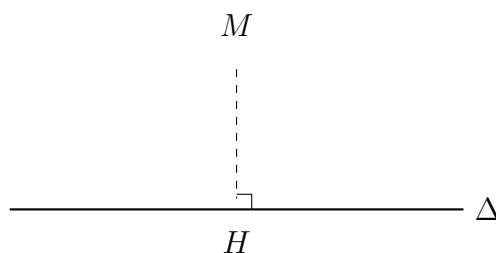


Illustration du projeté orthogonal H de M sur la droite Δ

3.2 Calculs de longueurs, angles, aires et volumes

Les problèmes de géométrie en seconde nécessitent le calcul de diverses grandeurs.

Propriété

Dans un triangle rectangle, la relation fondamentale de la trigonométrie est : $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.

Point de méthode

Stratégie de résolution de problèmes géométriques Pour résoudre un problème de géométrie:

1. **Analyser l'énoncé** : Identifier les données (points, droites, longueurs, angles...) et ce qui est demandé.
2. **Faire un schéma** : Représenter la situation, même à main levée, peut aider à visualiser le problème. Une figure soignée avec un logiciel de géométrie dynamique est un plus.
3. **Choisir les outils** : Décider si la géométrie classique, la géométrie repérée, les vecteurs, ou la trigonométrie sont les plus adaptés.
4. **Mettre en place la stratégie** :
 - Si c'est un problème de position (alignement, parallélisme), penser à la colinéarité des vecteurs.
 - Si c'est un problème de distance ou de milieu, utiliser les formules de coordonnées.
 - Si des angles sont impliqués, les relations trigonométriques peuvent être utiles.
 - Si une optimisation est demandée, chercher des fonctions à minimiser ou maximiser.
5. **Rédiger la solution** : Présenter clairement les étapes de calcul et de raisonnement.
6. **Vérifier la cohérence** : S'assurer que le résultat a du sens par rapport au problème.

4 Représenter et caractériser les droites du plan

En seconde, l'étude des équations de droite est approfondie, passant des fonctions affines à la forme générale des équations de droite. Le plan est ici muni d'un repère orthonormé.

4.1 Équations de droite

Définition

Un **vecteur directeur** d'une droite est tout vecteur non nul ayant la même direction que cette droite.

Propriété

Toute droite dans le plan admet une **équation cartésienne** de la forme $ax + by + c = 0$, où a, b, c sont des réels, et $(a, b) \neq (0, 0)$. Un vecteur directeur de cette droite est alors $\vec{u}(-b; a)$.

Propriété

Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une **équation réduite** de la forme $y = mx + p$.

- m est la **pente** (ou coefficient directeur) de la droite.
- p est l'ordonnée à l'origine (l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées).

Un vecteur directeur de cette droite est $\vec{u}(1; m)$. Les droites parallèles à l'axe des ordonnées ont une équation de la forme $x = k$ (où k est un réel).

Théorème

En utilisant le déterminant, on peut établir la forme générale d'une équation de droite. Soit une droite (D) passant par un point $A(x_A; y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(x_u; y_u)$. Un point $M(x; y)$ appartient à la droite (D) si et seulement si les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. Les coordonnées de $\vec{AM}$ sont $(x - x_A; y - y_A)$. La colinéarité s'écrit $\det(\vec{AM}, \vec{u}) = 0$, soit $(x - x_A)y_u - (y - y_A)x_u = 0$. En développant, on obtient une équation de la forme $ay + by + c = 0$.

Point de méthode

Déterminer l'équation d'une droite

- **À partir de deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$:**
 1. Calculer les coordonnées du vecteur directeur $\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$.
 2. Utiliser la condition de colinéarité : un point $M(x; y)$ est sur la droite (AB) si $\vec{AM}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires. Soit $\det(\vec{AM}, \vec{AB}) = 0$.
- **À partir d'un point $A(x_A; y_A)$ et d'un vecteur directeur $\vec{u}(x_u; y_u)$:**
 1. Utiliser directement la condition de colinéarité : un point $M(x; y)$ est sur la droite si $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. Soit $\det(\vec{AM}, \vec{u}) = 0$.
- **À partir d'un point $A(x_A; y_A)$ et de la pente m :**
 1. L'équation est de la forme $y = mx + p$.
 2. Le point A appartient à la droite, donc $y_A = mx_A + p$. On peut en déduire $p = y_A - mx_A$.
 3. Substituer p dans l'équation.

Exemple commenté : Déterminons l'équation de la droite passant par $A(1; 2)$ et $B(3; 8)$.

1. Calcul des coordonnées du vecteur directeur $\vec{AB}$: $(3 - 1; 8 - 2) = (2; 6)$.
2. Soit $M(x; y)$ un point de la droite. Les vecteurs $\vec{AM}(x - 1; y - 2)$ et $\vec{AB}(2; 6)$ doivent être colinéaires.
3. Calcul du déterminant: $(x - 1) \times 6 - (y - 2) \times 2 = 0$. $6x - 6 - 2y + 4 = 0$
 $6x - 2y - 2 = 0$.

L'équation cartésienne de la droite est $6x - 2y - 2 = 0$, ou $3x - y - 1 = 0$. On peut aussi l'écrire sous forme réduite $y = 3x - 1$. La pente est $m = 3$.

4.2 Utilisation des équations de droite

Point de méthode

Tracer une droite à partir de son équation

- **Équation réduite** ($y = mx + p$) :
 1. Placer le point d'ordonnée p sur l'axe des ordonnées.
 2. Utiliser la pente m : pour un déplacement de 1 unité vers la droite, se déplacer de m unités vers le haut (si $m > 0$) ou vers le bas (si $m < 0$). Cela donne un deuxième point.
 3. Tracer la droite passant par ces deux points.
- **Équation cartésienne** ($ax + by + c = 0$) :
 1. Choisir deux valeurs distinctes pour x (par exemple $x = 0$ et $x = 1$) et calculer les y correspondants pour obtenir deux points de la droite.
 2. Placer ces deux points et tracer la droite.

Point de méthode

Vérifier l'alignement de trois points avec une équation de droite

1. Déterminer l'équation de la droite passant par deux des points (par exemple A et B).
2. Vérifier si le troisième point (C) appartient à cette droite en substituant ses coordonnées dans l'équation. Si l'équation est vérifiée, les points sont alignés.

Point de méthode

Déterminer la position relative de deux droites

- **Parallélisme** : Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires (ou si elles ont la même pente pour des droites non verticales).
- **Sécantes** : Si elles ne sont pas parallèles, elles sont sécantes.

Point de méthode

Déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes Pour trouver le point d'intersection de deux droites, il faut résoudre le système d'équations formé par leurs équations. **Exemple** : Pour les droites $D_1 : y = 2x + 1$ et $D_2 : y = -x + 4$. On résout le système :
$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -x + 4 \end{cases}$$
 On substitue y de la première équation dans la seconde : $2x + 1 = -x + 4$ $3x = 3$ $x = 1$. On substitue $x = 1$ dans l'une des équations (par exemple la première) : $y = 2(1) + 1 = 3$. Le point d'intersection est $(1; 3)$.