

Recueil d'exercices de réflexion

Classe de Seconde Générale et Technologique

Géométrie

Ce recueil d'exercices a pour objectif de développer vos capacités de raisonnement, d'autonomie et de modélisation. Les problèmes proposés sont ouverts, incitant à la prise d'initiative et à la mobilisation de plusieurs notions mathématiques. Prenez le temps d'explorer différentes pistes et d'argumenter vos démarches.

Partie 1 : Manipuler les vecteurs du plan

Problème 1.1 : Le point mystère

On considère un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Soient les points $A(1, 2)$, $B(4, -1)$ et $C(-2, 3)$.

1. Déterminer les coordonnées d'un point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Est-il unique? Justifier votre réponse.
2. Existe-t-il un point E tel que $\vec{AE} = 2\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{BC}$? Si oui, déterminer ses coordonnées.
3. On considère un point $M(x, y)$. Déterminer l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{BC}$ soient colinéaires. Quelle est la nature géométrique de cet ensemble?
4. Soit F le point de coordonnées $(7, -4)$. Les points A , C et F sont-ils alignés? Justifier par le calcul vectoriel.

Problème 1.2 : Construction et propriétés

Soient A , B , C trois points non alignés du plan.

1. Construire le point D tel que $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$. Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$? Justifier.
2. Construire le point E tel que $\vec{AE} = \vec{AB} - \vec{AC}$.
3. On définit le point G par la relation vectorielle $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$. Construire ce point. Que représente-t-il pour le triangle ABC ?
4. Montrer que, pour tout point M du plan, $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$.

Problème 1.3 : Jeu de billard

Dans un repère orthonormé, une boule de billard est située au point $A(2, 1)$. Elle est frappée et doit toucher la bande représentée par l'axe des abscisses en un point P , puis une autre boule située au point $B(7, 4)$.

1. En utilisant la symétrie, déterminer les coordonnées du point P pour que le trajet $AP + PB$ soit le plus court possible.
2. Calculer la longueur minimale de ce trajet.
3. Si la boule touche la bande en un point $P'(5, 0)$, calculer la longueur du trajet $AP'B$. Comparer avec le résultat précédent.

Partie 2 : Résoudre des problèmes de géométrie

Problème 2.1 : L'énigme du jardinier

Un jardinier souhaite délimiter un parterre de fleurs de forme triangulaire ABC . Il sait que le côté AB mesure 8 mètres, le côté AC mesure 10 mètres et l'angle $\widehat{BAC}$ mesure 60° .

1. Calculer la longueur du côté BC .
2. Calculer l'aire du parterre de fleurs.
3. Le jardinier veut planter un rosier à égale distance des trois sommets du triangle. Où doit-il le planter précisément ? Justifier votre réponse et, si possible, donner une construction géométrique.
4. Il souhaite également installer un système d'arrosage automatique qui arrose toute la surface du parterre. Le système arrose une zone circulaire. Quel est le rayon minimal que doit avoir cette zone pour couvrir tout le parterre ?

Problème 2.2 : Optimisation d'une boîte

On souhaite construire une boîte sans couvercle à partir d'une feuille de carton rectangulaire de 20 cm sur 30 cm. Pour cela, on découpe des carrés identiques aux quatre coins de la feuille et on replie les bords.

1. Faire un schéma de la feuille de carton avec les découpes.
2. On note x la longueur du côté des carrés découpés. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
3. Exprimer le volume $V(x)$ de la boîte en fonction de x .
4. Pour quelle valeur de x le volume de la boîte est-il maximal ? Quel est ce volume maximal ? Vous pouvez vous aider d'une calculatrice graphique ou d'un logiciel.

Problème 2.3 : Le point sur la droite

Soient une droite D et un point M n'appartenant pas à D .

1. Définir le projeté orthogonal du point M sur la droite D . Pourquoi est-il unique ?
2. Démontrer que le projeté orthogonal du point M sur la droite D est le point de la droite D le plus proche du point M .
3. Application numérique : Dans un repère orthonormé, la droite D a pour équation $y = 2x - 3$ et le point M a pour coordonnées $(5, 1)$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de M sur D .

Partie 3 : Représenter et caractériser les droites du plan

Problème 3.1 : Alignement et intersection

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(1, 5)$, $B(3, 1)$ et $C(x, -3)$.

1. Déterminer l'équation de la droite (AB) .
2. Déterminer la valeur de x pour que les points A , B et C soient alignés.
3. On considère une droite D_1 passant par le point $E(-1, 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2, 3)$. Déterminer une équation cartésienne de D_1 .
4. On considère une droite D_2 d'équation $y = -2x + 7$. Déterminer si les droites D_1 et D_2 sont parallèles, sécantes ou confondues. Si elles sont sécantes, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Problème 3.2 : Famille de droites

On considère une famille de droites D_m d'équation $(m - 1)x + (2m + 1)y - 3 = 0$, où m est un paramètre réel.

1. Pour quelle valeur de m la droite D_m est-elle parallèle à l'axe des ordonnées ? Donner son équation dans ce cas.
2. Pour quelle valeur de m la droite D_m est-elle parallèle à l'axe des abscisses ? Donner son équation dans ce cas.
3. Montrer que toutes les droites de cette famille passent par un point fixe dont on déterminera les coordonnées.
4. Existe-t-il une valeur de m pour laquelle la droite D_m passe par le point $P(6, 0)$? Si oui, laquelle ?

Problème 3.3 : Distance d'un point à une droite

Soit une droite D d'équation $ax + by + c = 0$ et un point $M(x_0, y_0)$. La distance du point M à la droite D est donnée par la formule $d(M, D) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

1. Démontrer cette formule. (Indication : on pourra utiliser le projeté orthogonal et les vecteurs normaux).
2. Application : Calculer la distance du point $A(4, -2)$ à la droite D d'équation $3x - 4y + 5 = 0$.
3. On considère un cercle de centre $C(1, 1)$ et de rayon $R = 2$. La droite D' d'équation $y = x + k$ (où k est un réel) est-elle sécante, tangente ou extérieure au cercle ? Discuter selon les valeurs de k .