

Exercices d'application - Géométrie

Ce recueil d'exercices a pour but de consolider les notions de géométrie abordées en classe de Seconde Générale et Technologique. Les exercices sont classés par sous-thème et suivent une progression de difficulté.

I. Manipuler les vecteurs du plan

Propriété

Un vecteur $\vec{u}$ est caractérisé par sa direction, son sens et sa norme. Deux vecteurs sont égaux s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

Propriété

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, un vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées (x, y) et on note $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. La norme d'un vecteur $\vec{u}(x, y)$ est donnée par $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Propriété

Les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$ sont $(x_B - x_A, y_B - y_A)$. La distance entre deux points A et B est donnée par $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Propriété

Deux vecteurs $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$.

Propriété

La colinéarité de vecteurs permet de caractériser l'alignement de points ou le parallélisme de droites.

Exercice 1. Soit un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Placer les points $A(1, 2)$, $B(4, 3)$, $C(2, -1)$.

Exercice 2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ et $\vec{CA}$.

Exercice 3. Calculer les normes des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CA}$.

Exercice 4. Construire géométriquement les vecteurs $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{BC}$ et $\vec{v} = \vec{CA} + \vec{AB}$.

Exercice 5. Soient les vecteurs $\vec{u}(3, -2)$ et $\vec{v}(-1, 4)$.

(a) Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$.

(b) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Justifier votre réponse.

Exercice 6. On considère les points $E(0, 5)$, $F(3, 1)$ et $G(6, -3)$. Les points E, F, G sont-ils alignés ? Justifier votre réponse à l'aide des vecteurs.

Exercice 7. Soient les points $P(1, 1)$, $Q(3, 4)$, $R(-1, 0)$ et $S(1, 3)$. Le quadrilatère PQRS est-il un parallélogramme ? Justifier.

Exercice 8. Soient les points $A(2, 1)$, $B(5, 2)$ et $C(x, 4)$. Déterminer la valeur de x pour que les points A, B et C soient alignés.

Exercice 9. Dans un repère orthonormé, on donne $A(1, -2)$, $B(3, 0)$ et $C(0, y)$. Déterminer y pour que le triangle ABC soit rectangle en A.

II. Résoudre des problèmes de géométrie

Propriété

Le projeté orthogonal d'un point M sur une droite Δ est le point de la droite Δ le plus proche de M.

Propriété

Dans un triangle rectangle, on a la relation trigonométrique $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.

Exercice 10. Soit un triangle ABC tel que $AB = 5$ cm, $AC = 6$ cm et l'angle $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Calculer l'aire du triangle ABC.

- Exercice 11.** Soit un cercle de centre O et de rayon R . Soit A un point extérieur au cercle. On mène du point A une tangente au cercle, qui touche le cercle au point T . Que peut-on dire du triangle OAT ? Justifier.
- Exercice 12.** Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(1, 2)$, $B(5, 2)$ et $C(3, 6)$.
- Calculer les longueurs AB , AC et BC .
 - Quelle est la nature du triangle ABC ?
 - Calculer l'aire du triangle ABC .
- Exercice 13.** Une échelle de 5 mètres de long est appuyée contre un mur vertical. Le pied de l'échelle est à 3 mètres du bas du mur. À quelle hauteur sur le mur l'échelle atteint-elle?
- Exercice 14.** On considère un rectangle $ABCD$ de longueur 8 cm et de largeur 6 cm. Calculer la longueur de la diagonale AC .
- Exercice 15.** Soit un segment $[AB]$. Où se situe l'ensemble des points M du plan tels que le triangle AMB soit rectangle en M ?

III. Représenter et caractériser les droites du plan

Propriété

Une droite peut être représentée par une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ ou, si elle n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, par une équation réduite $y = mx + p$, où m est la pente (ou coefficient directeur) et p l'ordonnée à l'origine.

Propriété

Un vecteur directeur d'une droite d'équation $ax + by + c = 0$ est $\vec{u}(-b, a)$. Pour une droite d'équation $y = mx + p$, un vecteur directeur est $\vec{u}(1, m)$.

Propriété

Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires (ou si elles ont la même pente).

Propriété

Le point d'intersection de deux droites sécantes est la solution du système de leurs équations.

- Exercice 16.** Déterminer l'équation réduite de la droite passant par les points $A(2, 3)$ et $B(5, 9)$.
- Exercice 17.** Déterminer une équation cartésienne de la droite D passant par le point $A(1, -2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3, 4)$.
- Exercice 18.** Tracer la droite d'équation $2x - 3y + 6 = 0$ dans un repère orthonormé.
- Exercice 19.** Les points $A(1, 2)$, $B(3, 5)$ et $C(7, 11)$ sont-ils alignés? Justifier.
- Exercice 20.** Soient les droites D_1 d'équation $y = 2x - 1$ et D_2 d'équation $4x - 2y + 5 = 0$. Les droites D_1 et D_2 sont-elles parallèles ou sécantes? Justifier.
- Exercice 21.** Résoudre le système d'équations suivant et interpréter graphiquement la solution :

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

- Exercice 22.** Déterminer l'équation de la droite passant par le point $P(-2, 1)$ et parallèle à la droite d'équation $y = -3x + 4$.
- Exercice 23.** Déterminer l'équation de la droite passant par le point $K(4, -3)$ et perpendiculaire à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 2$.