

Polycopié de Mathématiques - Seconde Générale et Technologique

Chapitre : Fonctions

Juin 2025

Contents

1	Introduction aux Fonctions	2
1.1	Histoire des mathématiques	2
2	Répertoire de Fonctions de Référence	2
2.1	Contenus	2
2.2	Capacités attendues	2
2.3	Démonstration	3
2.4	Exemples commentés	3
2.4.1	Fonction Carré	3
2.4.2	Fonction Inverse	3
2.4.3	Fonction Racine Carrée	4
2.4.4	Fonction Cube	4
2.5	Point de méthode : Comparer des images	4
2.6	Exemple : Comparer des images pour la fonction carré	5
2.7	Point de méthode : Résoudre $f(x) = k$ ou $f(x) < k$	5
2.8	Exemple : Résoudre $x^2 = 4$ et $x^2 < 4$	5
3	Représentation Algébrique et Graphique des Fonctions	6
3.1	Contenus	6
3.2	Capacités attendues	6
3.3	Approfondissement possible	6
3.4	Définition : Courbe représentative	6
3.5	Point de méthode : Appartenance d'un point à une courbe	6
3.6	Exemple : Appartenance d'un point à une courbe	6
3.7	Définition : Fonctions paires et impaires	7
3.8	Exemple : Étude de parité	7
3.9	Point de méthode : Résoudre des équations/inéquations $f(x) = g(x)$ ou $f(x) < g(x)$	7
3.10	Exemple : Résoudre $x^2 = x + 2$	7
4	Variations et Extremums des Fonctions	8
4.1	Contenus	8
4.2	Capacités attendues	8
4.3	Démonstration	8
4.4	Exemples d'algorithme	8
4.5	Définition : Fonction croissante, décroissante, monotone	9
4.6	Tableau de variations	9
4.7	Exemple : Tableau de variations de la fonction carré	9
4.8	Définition : Maximum et minimum	9
4.9	Point de méthode : Déterminer graphiquement les extremums	9
4.10	Exemple : Extremums graphiques	10
4.11	Point de méthode : Utiliser les logiciels pour les variations	10
4.12	Remarque pédagogique	10

1 Introduction aux Fonctions

Au collège, la notion de fonction a été abordée de manière progressive. Vous avez manipulé différentes manières de représenter une fonction : une expression algébrique (une formule), un tableau de valeurs ou une représentation graphique. Vous connaissez également le vocabulaire de base : variable, fonction, antécédent, image. Vous savez déterminer une image ou des antécédents d'un nombre par une fonction, selon le mode de représentation choisi. Enfin, vous avez étudié les fonctions linéaires et les fonctions affines, ainsi que leur représentation graphique.

En classe de Seconde, nous allons consolider cette notion de fonction, en l'abordant comme l'expression de la dépendance d'une variable par rapport à une autre. Nous exploiterons divers registres de représentation, notamment le registre algébrique et le registre graphique. Nous étendrons également la panoplie des fonctions de référence que vous connaissez déjà, et nous étudierons les notions de variations et d'extremums des fonctions.

Les fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ sont particulièrement utiles pour modéliser des phénomènes continus. Cependant, nous pourrions aussi rencontrer des exemples de fonctions définies sur $\mathbb{N}$ (les nombres entiers naturels) pour modéliser des phénomènes discrets ; dans ce cas, la notation $u(n)$ est souvent utilisée.

La modélisation d'une dépendance par une fonction se retrouve dans de nombreux domaines : la géométrie, la biologie, l'économie, la physique ou les sciences sociales. Il est important de noter que la modélisation de phénomènes dépendant du temps mettra en évidence la variable t .

Les outils numériques jouent un rôle essentiel dans l'étude des fonctions. Un logiciel de géométrie dynamique sera utilisé pour la représentation graphique et l'utilisation de curseurs. Python, un tableur ou une calculatrice seront également mis à profit pour illustrer l'aspect de programme de calcul des fonctions.

Dans un premier temps, vous découvrirez, manipulerez et verbaliserez certaines propriétés des fonctions de référence (parité, monotonie sur un intervalle). Ces propriétés seront ensuite généralisées aux fonctions quelconques, leur maîtrise étant un objectif de fin d'année. La formalisation de ces propriétés sera l'occasion d'un travail sur les quantificateurs.

1.1 Histoire des mathématiques

La notion de fonction a connu une très lente élaboration, depuis l'Antiquité jusqu'à sa codification actuelle par Dirichlet. Des étapes importantes ont été marquées par des mathématiciens comme Newton, Leibniz et Euler. Il est important de souligner l'importance de la notation algébrique dans ce développement.

2 Répertoire de Fonctions de Référence

Il est essentiel de construire un répertoire mental des courbes représentatives des fonctions de référence. Ces images mentales serviront de base pour l'étude des propriétés des fonctions.

2.1 Contenus

- Fonctions carré, inverse, racine carrée, cube : définitions et courbes représentatives.

2.2 Capacités attendues

- Pour deux nombres a et b donnés et une fonction de référence f , comparer $f(a)$ et $f(b)$ numériquement ou graphiquement.
- Pour les fonctions affines, carré, inverse, racine carrée et cube, résoudre graphiquement ou algébriquement une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$ ou $f(x) < k$.

2.3 Démonstration

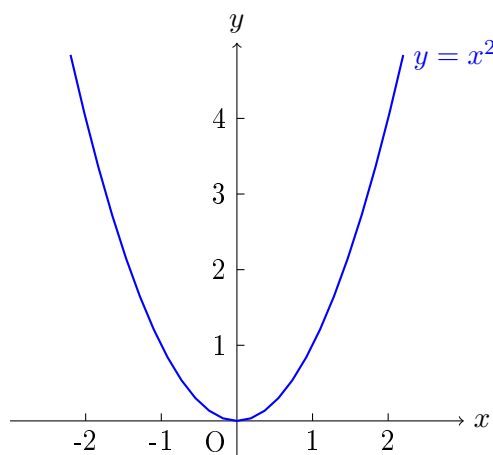
- Étudier la position relative des courbes d'équation $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, pour $x \geq 0$.

2.4 Exemples commentés

2.4.1 Fonction Carré

La fonction carré, notée $f(x) = x^2$, associe à tout nombre réel x son carré.

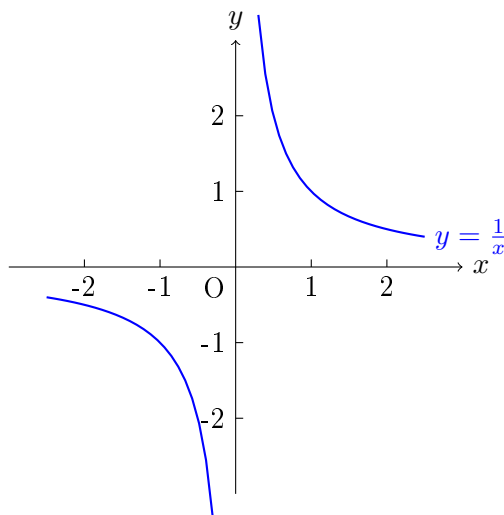
- Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.
- Sa courbe représentative est une parabole.
- Elle est paire, c'est-à-dire $f(-x) = f(x)$, ce qui se traduit par une symétrie de sa courbe représentative par rapport à l'axe des ordonnées.



2.4.2 Fonction Inverse

La fonction inverse, notée $f(x) = \frac{1}{x}$, associe à tout nombre réel non nul x son inverse.

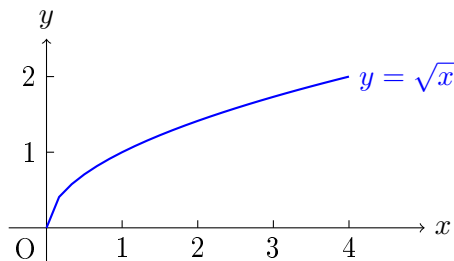
- Son ensemble de définition est $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Sa courbe représentative est une hyperbole.
- Elle est impaire, c'est-à-dire $f(-x) = -f(x)$, ce qui se traduit par une symétrie de sa courbe représentative par rapport à l'origine du repère.



2.4.3 Fonction Racine Carrée

La fonction racine carrée, notée $f(x) = \sqrt{x}$, associe à tout nombre réel positif x sa racine carrée.

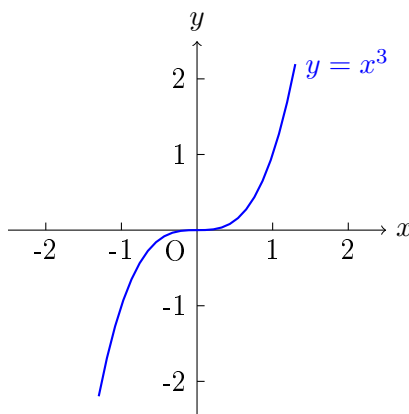
- Son ensemble de définition est $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$.
- Sa courbe représentative est une demi-parabole horizontale.



2.4.4 Fonction Cube

La fonction cube, notée $f(x) = x^3$, associe à tout nombre réel x son cube.

- Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.
- Sa courbe représentative.
- Elle est impaire, c'est-à-dire $f(-x) = -f(x)$, ce qui se traduit par une symétrie de sa courbe représentative par rapport à l'origine du repère.



2.5 Point de méthode : Comparer des images

Point de méthode

Pour comparer $f(a)$ et $f(b)$ pour une fonction de référence f :

1. **Numériquement** : Calculer les valeurs $f(a)$ et $f(b)$ puis les comparer directement.
2. **Graphiquement** : Placer les points d'abscisses a et b sur l'axe des abscisses, trouver les points correspondants sur la courbe représentative de f , puis comparer leurs ordonnées.
3. **Algébriquement** : Utiliser les propriétés de variation de la fonction (voir Section 4).

2.6 Exemple : Comparer des images pour la fonction carré

Soient $a = 2$ et $b = 3$. Comparons $f(a)$ et $f(b)$ pour la fonction carré $f(x) = x^2$.

1. **Numériquement** : $f(2) = 2^2 = 4$. $f(3) = 3^2 = 9$. On a $4 < 9$, donc $f(2) < f(3)$.
2. **Graphiquement** : Sur la courbe de $y = x^2$, le point d'abscisse 2 est $(2, 4)$ et le point d'abscisse 3 est $(3, 9)$. On voit bien que le point $(3, 9)$ est plus haut que le point $(2, 4)$, donc $f(3) > f(2)$.
3. **Algébriquement** : La fonction carré est croissante sur $[0, +\infty[$. Comme $2 \in [0, +\infty[$ et $3 \in [0, +\infty[$, et que $2 < 3$, on en déduit que $f(2) < f(3)$.

2.7 Point de méthode : Résoudre $f(x) = k$ ou $f(x) < k$

Point de méthode

Pour résoudre une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$ ou $f(x) < k$ avec une fonction de référence:

1. Graphiquement :

- Pour $f(x) = k$, tracer la droite horizontale $y = k$. Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de la courbe de f et de la droite $y = k$.
- Pour $f(x) < k$, tracer la droite horizontale $y = k$. Les solutions sont les abscisses des points de la courbe de f qui sont en dessous de la droite $y = k$.

2. Algébriquement :

- Pour $f(x) = k$, transformer l'équation pour isoler x .
- Pour $f(x) < k$, transformer l'inéquation en tenant compte des règles de manipulation des inégalités (attention à la multiplication ou division par un nombre négatif, ou à la fonction inverse qui change l'ordre sur des intervalles pertinents).

3. **Logicielle** : Utiliser un outil numérique (calculatrice graphique ou logiciel) pour visualiser la courbe et la droite, ou pour trouver les solutions approchées.

2.8 Exemple : Résoudre $x^2 = 4$ et $x^2 < 4$

Résolution de $x^2 = 4$:

1. **Graphiquement** : On trace la courbe $y = x^2$ et la droite $y = 4$. Les points d'intersection ont pour abscisses $x = -2$ et $x = 2$.
2. **Algébriquement** : $x^2 = 4 \iff x = \sqrt{4}$ ou $x = -\sqrt{4} \iff x = 2$ ou $x = -2$. Les solutions sont -2 et 2 .

Résolution de $x^2 < 4$:

1. **Graphiquement** : On cherche les points de la courbe $y = x^2$ qui sont en dessous de la droite $y = 4$. Cela correspond aux abscisses des points situés entre -2 et 2 . L'ensemble des solutions est l'intervalle $] -2, 2[$.
2. **Algébriquement** : $x^2 < 4 \iff x^2 - 4 < 0 \iff (x - 2)(x + 2) < 0$. On étudie le signe du pro-

duit $(x - 2)(x + 2)$ à l'aide d'un tableau de signes :

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x - 2$		$-$	0	$+$
$x + 2$	$+$	0	$-$	$+$
$(x - 2)(x + 2)$	$-$	0	$+$	$-$

L'inéquation $(x - 2)(x + 2) < 0$ est vérifiée lorsque $x \in] -2, 2[$.

3 Représentation Algébrique et Graphique des Fonctions

3.1 Contenus

- Fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle ou une réunion finie d'intervalles de $\mathbb{R}$.
- Courbe représentative : la courbe d'équation $y = f(x)$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient $y = f(x)$.
- Fonction paire, impaire. Traduction géométrique.

3.2 Capacités attendues

- Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe : appartenance, calcul de coordonnées.
- Modéliser par des fonctions des situations issues des mathématiques, des autres disciplines.
- Résoudre une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$, $f(x) < k$, en choisissant une méthode adaptée : graphique, algébrique, logicielle.
- Résoudre une équation, une inéquation produit ou quotient, à l'aide d'un tableau de signes.
- Résoudre, graphiquement ou à l'aide d'un outil numérique, une équation ou inéquation du type $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$.

3.3 Approfondissement possible

- Étudier la parité d'une fonction dans des cas simples.

3.4 Définition : Courbe représentative

Définition

La courbe représentative d'une fonction f , notée $\mathcal{C}_f$, est l'ensemble de tous les points $M(x; y)$ du plan dont les coordonnées vérifient l'équation $y = f(x)$.

3.5 Point de méthode : Appartenance d'un point à une courbe

Point de méthode

Pour vérifier si un point $A(x_A; y_A)$ appartient à la courbe représentative d'une fonction f :

1. Calculer l'image de l'abscisse du point par la fonction, c'est-à-dire $f(x_A)$.
2. Comparer le résultat avec l'ordonnée du point y_A .
3. Si $f(x_A) = y_A$, alors le point A appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$. Sinon, il n'y appartient pas.

3.6 Exemple : Appartenance d'un point à une courbe

Soit la fonction $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Le point $A(2; -1)$ appartient-il à la courbe représentative de f ?

Calculons $f(2)$: $f(2) = 2^2 - 3(2) + 1 = 4 - 6 + 1 = -1$. L'image de l'abscisse de A par f est -1 , ce qui est égal à l'ordonnée de A . Donc, le point $A(2; -1)$ appartient bien à la courbe représentative de f .

3.7 Définition : Fonctions paires et impaires

Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire que si $x \in D_f$, alors $-x \in D_f$).

- f est une **fonction paire** si, pour tout $x \in D_f$, $f(-x) = f(x)$. Géométriquement, la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- f est une **fonction impaire** si, pour tout $x \in D_f$, $f(-x) = -f(x)$. Géométriquement, la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

3.8 Exemple : Étude de parité

- La fonction $f(x) = x^2$ est paire, car $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- La fonction $f(x) = x^3$ est impaire, car $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. Sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.
- La fonction $f(x) = x + 1$ n'est ni paire ni impaire. En effet, $f(-x) = -x + 1$. $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$.

3.9 Point de méthode : Résoudre des équations/inéquations $f(x) = g(x)$ ou $f(x) < g(x)$

Point de méthode

Pour résoudre une équation ou une inéquation du type $f(x) = g(x)$ ou $f(x) < g(x)$:

1. Graphiquement :

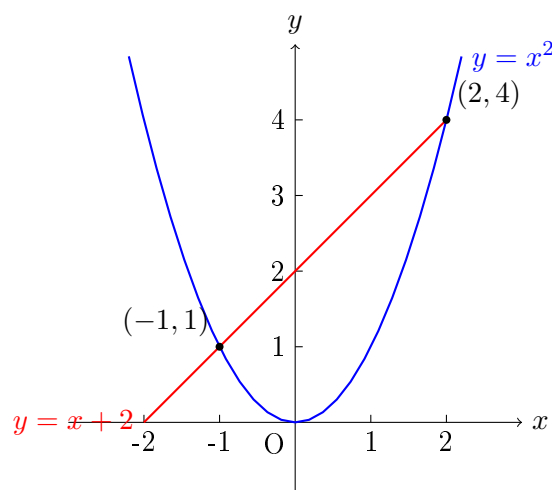
- Pour $f(x) = g(x)$, tracer les courbes représentatives de f et de g . Les solutions sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes.
- Pour $f(x) < g(x)$, tracer les courbes de f et de g . Les solutions sont les abscisses des points où la courbe de f est en dessous de la courbe de g .

2. Algébriquement : Ramener l'équation ou l'inéquation à zéro. Par exemple, $f(x) = g(x)$ devient $f(x) - g(x) = 0$. On peut alors étudier la nouvelle fonction $h(x) = f(x) - g(x)$.

3. Logicielle : Utiliser une calculatrice graphique ou un logiciel pour visualiser les courbes et trouver les points d'intersection.

3.10 Exemple : Résoudre $x^2 = x + 2$

Résolution graphique de $x^2 = x + 2$: Tracer la courbe $y = x^2$ (une parabole) et la droite $y = x + 2$. On observe que les deux courbes se coupent en deux points dont les abscisses sont $x = -1$ et $x = 2$.



Résolution algébrique de $x^2 = x + 2$: $x^2 = x + 2 \iff x^2 - x - 2 = 0$. Il s'agit d'une équation du second degré. On peut chercher les racines. Par factorisation ou en utilisant le discriminant (méthodes vues en Première). Ici, on peut factoriser : $(x - 2)(x + 1) = 0$. Les solutions sont $x = 2$ ou $x = -1$.

4 Variations et Extremums des Fonctions

4.1 Contenus

- Croissance, décroissance, monotonie d'une fonction définie sur un intervalle. Tableau de variations.
- Maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.
- Pour une fonction affine, interprétation du coefficient directeur comme taux d'accroissement, variations selon son signe.
- Variations des fonctions carré, inverse, racine carrée, cube.

4.2 Capacités attendues

- Relier représentation graphique et tableau de variations.
- Déterminer graphiquement les extremums d'une fonction sur un intervalle.
- Exploiter un logiciel de géométrie dynamique ou de calcul formel, la calculatrice ou Python pour décrire les variations d'une fonction donnée par une formule.
- Relier sens de variation, signe et droite représentative d'une fonction affine.

4.3 Démonstration

- Variations des fonctions carré, inverse, racine carrée.

4.4 Exemples d'algorithme

- Pour une fonction dont le tableau de variations est donné, algorithmes d'approximation numérique d'un extremum (balayage, dichotomie).
- Algorithme de calcul approché de longueur d'une portion de courbe représentative de fonction.

4.5 Définition : Fonction croissante, décroissante, monotone

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- f est **croissante** sur I si, pour tous $a, b \in I$ tels que $a < b$, on a $f(a) \leq f(b)$. (La fonction conserve l'ordre.)
- f est **strictement croissante** sur I si, pour tous $a, b \in I$ tels que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$.
- f est **décroissante** sur I si, pour tous $a, b \in I$ tels que $a < b$, on a $f(a) \geq f(b)$. (La fonction inverse l'ordre.)
- f est **strictement décroissante** sur I si, pour tous $a, b \in I$ tels que $a < b$, on a $f(a) > f(b)$.
- f est **monotone** sur I si elle est soit croissante sur I , soit décroissante sur I .

4.6 Tableau de variations

Le tableau de variations est un outil qui synthétise les informations sur le sens de variation d'une fonction sur ses intervalles de définition. Les flèches indiquent le sens de variation et les valeurs aux "tournants" ou aux bornes des intervalles sont indiquées.

4.7 Exemple : Tableau de variations de la fonction carré

La fonction carré $f(x) = x^2$ est décroissante sur $] -\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$. Son minimum est 0 atteint en $x = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f		$\searrow$ 0 $\nearrow$	

4.8 Définition : Maximum et minimum

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- La fonction f admet un **maximum** M sur l'intervalle I s'il existe un nombre $c \in I$ tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$ et $f(c) = M$. M est le maximum de f sur I , et il est atteint en c .
- La fonction f admet un **minimum** m sur l'intervalle I s'il existe un nombre $d \in I$ tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \geq m$ et $f(d) = m$. m est le minimum de f sur I , et il est atteint en d .

Ces valeurs sont appelées les **extremums** de la fonction sur l'intervalle I .

4.9 Point de méthode : Déterminer graphiquement les extremums

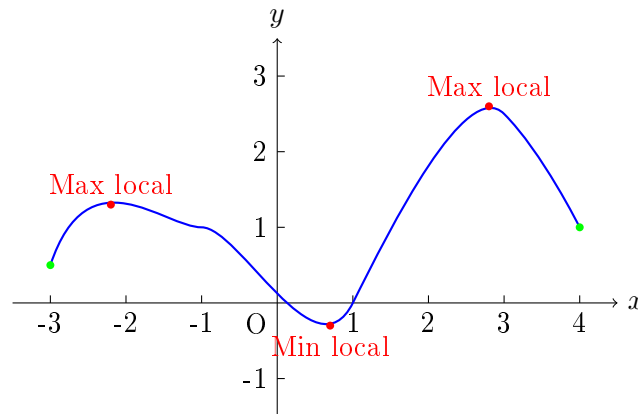
Point de méthode

Pour déterminer graphiquement les extremums d'une fonction sur un intervalle:

1. Observer la courbe représentative de la fonction sur l'intervalle donné.
2. Le point le plus haut de la courbe sur cet intervalle correspond au maximum (son ordonnée est le maximum, son abscisse est la valeur où il est atteint).
3. Le point le plus bas de la courbe sur cet intervalle correspond au minimum (son ordonnée est le minimum, son abscisse est la valeur où il est atteint).

4.10 Exemple : Extremums graphiques

Considérons la fonction dont la courbe est donnée ci-dessous sur l'intervalle $[-3, 4]$.



Sur l'intervalle $[-3, 4]$:

- Le maximum global de la fonction semble être d'environ 2.5, atteint pour $x = 3$.
- Le minimum global de la fonction semble être d'environ -1 , atteint pour $x = 0.5$.

4.11 Point de méthode : Utiliser les logiciels pour les variations

Point de méthode

Pour étudier les variations d'une fonction donnée par une formule à l'aide d'un logiciel (calculatrice graphique, GeoGebra, Python avec des bibliothèques de tracé):

1. Saisir la formule de la fonction.
2. Représenter graphiquement la fonction.
3. Observer la courbe pour déterminer les intervalles où la fonction monte (croissante) ou descend (décroissante).
4. Identifier les points où la fonction change de sens de variation pour déterminer les extremums locaux.

4.12 Remarque pédagogique

L'utilisation d'outils numériques permet d'expérimenter et de formuler des conjectures sur le comportement des fonctions. Ces conjectures devront ensuite être prouvées de manière algébrique ou par des raisonnements basés sur les propriétés des fonctions.