

Recueil d'exercices de réflexion - Fonctions

Seconde Générale et Technologique

Juin 2025

Résumé

Ce recueil propose des exercices de réflexion sur le thème des fonctions, destinés aux élèves de seconde générale et technologique. L'objectif est de consolider la notion de fonction, d'exploiter divers registres de représentation (algébrique, graphique), d'étendre le répertoire des fonctions de référence, et d'étudier les variations et les extremums des fonctions. Ces exercices sont conçus pour favoriser l'autonomie, la prise d'initiative, l'argumentation, l'analyse et la modélisation.

Table des matières

1	Introduction aux fonctions	2
2	Répertoire de fonctions de référence	2
3	Variations et extremums de fonctions	3
4	Modélisation et résolution de problèmes	3

1 Introduction aux fonctions

Propriété

En classe de seconde, les fonctions sont essentielles pour modéliser des phénomènes. Elles permettent d'exprimer la dépendance d'une variable par rapport à une autre, en utilisant des outils numériques comme les logiciels de géométrie dynamique, Python, les tableurs ou les calculatrices.

Exercice 1 : Modélisation d'une situation de coût

Une entreprise fabrique des objets. Le coût de production quotidien, en euros, est donné par la fonction $C(x) = x^2 - 60x + 1000$, où x représente le nombre d'objets fabriqués. On suppose que l'entreprise fabrique entre 0 et 80 objets par jour.

1. Quel est le coût de production si l'entreprise fabrique 30 objets ?
2. Est-il possible que le coût de production soit de 600 euros ? Justifier votre réponse.
3. L'entreprise souhaite que le coût de production soit inférieur ou égal à 700 euros. Déterminer les nombres d'objets que l'entreprise doit fabriquer pour atteindre cet objectif.
4. L'entreprise cherche à minimiser son coût de production. Quel est le nombre d'objets à fabriquer pour que le coût soit minimal ? Quel est alors ce coût minimal ?

Exercice 2 : Interprétation graphique et algébrique

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. La courbe représentative de f est une parabole et celle de g est une droite.

1. Si $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 2$:
 - (a) Représenter graphiquement ces deux fonctions dans un même repère.
 - (b) Estimer graphiquement les coordonnées des points d'intersection des deux courbes.
 - (c) Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = g(x)$.
 - (d) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$.
2. On sait que la courbe de f passe par les points $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(-1, 1)$. On sait que la courbe de g passe par les points $(0, 2)$ et $(2, 4)$. Déterminer les expressions algébriques de $f(x)$ et $g(x)$.

2 Répertoire de fonctions de référence

Propriété

Les fonctions de référence sont la fonction carré $f(x) = x^2$, la fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$, la fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$ et la fonction cube $f(x) = x^3$. Il est important de bien connaître leurs définitions et leurs courbes représentatives.

Exercice 3 : Comparaison de fonctions de référence

On considère les fonctions carré $f(x) = x^2$, cube $g(x) = x^3$ et racine carrée $h(x) = \sqrt{x}$.

1. Pour $x \geq 0$, comparer $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ en fonction des intervalles de x .
2. Démontrer l'étude de la position relative des courbes d'équation $y = x$, $y = x^2$ et $y = x^3$ pour $x \geq 0$.
3. Sans utiliser la calculatrice, classer par ordre croissant les nombres suivants : $(0.5)^2$, $(0.5)^3$, $\sqrt{0.5}$.
4. Sans utiliser la calculatrice, classer par ordre croissant les nombres suivants : $(1.5)^2$, $(1.5)^3$, $\sqrt{1.5}$.

Exercice 4 : Propriétés de la fonction inverse

La fonction inverse est définie par $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de cette fonction ?
2. Sans effectuer de calcul, expliquer pourquoi la fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

3. On souhaite résoudre l'inéquation $\frac{1}{x} < 2$.
 - (a) Résoudre cette inéquation graphiquement.
 - (b) Résoudre cette inéquation algébriquement.
4. La fonction inverse est-elle paire ou impaire? Justifier votre réponse et en déduire une propriété géométrique de sa courbe représentative.

3 Variations et extremums de fonctions

Définition

Une fonction est croissante sur un intervalle si, pour tous a et b dans cet intervalle tels que $a < b$, on a $f(a) \leq f(b)$. Elle est décroissante si $f(a) \geq f(b)$. Un maximum (ou minimum) d'une fonction sur un intervalle est la plus grande (ou plus petite) valeur atteinte par la fonction sur cet intervalle.

Exercice 5 : Étude de variations

Soit une fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
Variations de f		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

1. Quel est le maximum de la fonction sur l'intervalle $[-5, 5]$? Justifier.
2. Comparer $f(-3)$ et $f(-1)$. Justifier.
3. Peut-on comparer $f(0)$ et $f(2)$? Justifier.
4. La fonction f peut-elle s'annuler sur son ensemble de définition? Si oui, combien de fois?
5. Proposer une représentation graphique possible de la fonction f .

Exercice 6 : Optimisation d'aire

On dispose d'un carré de côté 10 cm. On découpe dans chaque coin un petit carré de côté x cm. On obtient ainsi une croix.

1. Dans quel intervalle x doit-il se situer?
2. Exprimer l'aire $A(x)$ de la croix en fonction de x .
3. À l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice graphique, représenter la fonction $A(x)$.
4. Pour quelle valeur de x l'aire de la croix est-elle maximale? Quelle est cette aire maximale?
5. Pour quelle valeur de x l'aire de la croix est-elle minimale? Quelle est cette aire minimale?
6. Existe-t-il une valeur de x pour laquelle l'aire de la croix est égale à 50 cm^2 ? Si oui, déterminer cette ou ces valeurs.

4 Modélisation et résolution de problèmes

Point de méthode

La modélisation d'une situation par une fonction permet de traduire un problème concret en un problème mathématique. La résolution d'équations ou d'inéquations associées à ces fonctions peut se faire par des méthodes graphiques, algébriques ou logicielles.

Exercice 7 : Distance et fonctions

Dans un repère orthonormé, on considère le point $A(2, 3)$. Soit M un point sur l'axe des abscisses de coordonnées $(x, 0)$.

1. Exprimer la distance AM en fonction de x . On notera cette fonction $d(x)$.
2. Sur quel intervalle la fonction $d(x)$ est-elle définie?

3. À l'aide d'une calculatrice graphique, conjecturer le minimum de la fonction $d(x)$. Pour quelle valeur de x est-il atteint ?
4. Que représente géométriquement cette valeur de x ?
5. Peut-on démontrer ce résultat algébriquement ?

Exercice 8 : Problème d'optimisation avec une fonction de référence

Un agriculteur possède 100 mètres de clôture pour délimiter un enclos rectangulaire le long d'une rivière. La rivière forme l'un des côtés de l'enclos, il n'y a donc pas besoin de clôture de ce côté.

1. On note x la largeur de l'enclos (côté perpendiculaire à la rivière). Exprimer la longueur de l'enclos en fonction de x .
2. Exprimer l'aire $A(x)$ de l'enclos en fonction de x .
3. Dans quel intervalle x doit-il se situer ?
4. Étudier les variations de la fonction $A(x)$ sur son intervalle de définition.
5. Déterminer les dimensions de l'enclos pour que son aire soit maximale. Quelle est alors cette aire maximale ?
6. L'agriculteur souhaite que l'aire de l'enclos soit supérieure à 1200 m^2 . Est-ce possible ? Si oui, quelles sont les largeurs possibles de l'enclos ?

Exercice 9 : Fonctions et situations concrètes

Pour chacune des situations suivantes, identifier une ou plusieurs fonctions pertinentes pour modéliser la situation, donner leur expression algébrique si possible, et préciser ce qu'elles représentent.

1. Un commerçant vend des articles. Le prix unitaire est de 5 euros. Il propose une réduction de 10% si le client achète plus de 50 articles.
2. La température d'un plat qui sort du four à 200°C et qui refroidit à l'air ambiant (température constante de 20°C).
3. La hauteur d'une balle lancée en l'air en fonction du temps.
4. Le nombre de bactéries dans une culture qui double toutes les heures.
5. Le volume d'une sphère en fonction de son rayon.