

Recueil d'exercices de réflexion : Probabilités et Statistiques (Première Générale)

<https://exomaths.fr>

18 juin 2025

Introduction

Ce recueil propose des exercices de réflexion en probabilités et statistiques, conçus pour encourager la prise d'initiative, l'approfondissement des notions et la modélisation de situations complexes. Ces problèmes visent à développer l'autonomie et les capacités d'analyse des élèves.

1 Situations complexes et modélisation

1.1 Probabilités conditionnelles et arbres de décision

Exercice 1 **Le problème des trois portes (Monty Hall)** *Vous participez à un jeu télévisé. Trois portes vous sont présentées. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture (le gros lot), et derrière les deux autres se trouvent des chèvres.*

1. *Vous choisissez une porte (disons la porte 1). Le présentateur, qui sait où se trouve la voiture, ouvre une autre porte (disons la porte 3) et révèle une chèvre. Il vous propose alors de conserver votre choix initial (porte 1) ou de changer pour l'autre porte restante (porte 2). Que devez-vous faire pour maximiser vos chances de gagner la voiture ? Justifier votre réponse de manière rigoureuse.*
2. *Modéliser cette situation à l'aide d'un arbre pondéré, en considérant les événements "la voiture est derrière la porte 1", "la voiture est derrière la porte 2", "la voiture est derrière la porte 3", et les différentes stratégies de choix (garder ou changer).*
3. *Discuter de l'intuition première par rapport au résultat mathématique. Pourquoi ce problème est-il souvent contre-intuitif ?*

Exercice 2 **Fiabilité d'un système** *Une entreprise fabrique des composants électroniques. Chaque composant a une probabilité de défaillance de 0,02. Pour améliorer la fiabilité d'un système, elle utilise trois de ces composants montés en parallèle. Le système fonctionne si au moins un des trois composants fonctionne.*

1. *Calculer la probabilité que le système tombe en panne.*
2. *Calculer la probabilité que le système fonctionne.*
3. *L'entreprise envisage une deuxième option : un système avec deux composants montés en série (si l'un tombe en panne, le système entier tombe en panne), mais chaque composant a cette fois une probabilité de défaillance de 0,01. Lequel des deux systèmes est le plus fiable ? Justifier votre réponse par des calculs.*
4. *Proposer une troisième architecture de système (avec un nombre de composants limité à 4) qui maximise la fiabilité, tout en expliquant votre démarche.*

1.2 Variables aléatoires et prise de décision

Exercice 3 **Investissement risqué** *Un investisseur hésite entre deux placements A et B.*

- *Le placement A rapporte 1000 € avec une probabilité de 0.6, et fait perdre 500 € avec une probabilité de 0.4.*
 - *Le placement B rapporte 2000 € avec une probabilité de 0.3, et fait perdre 100 € avec une probabilité de 0.7.*
1. *Pour chaque placement, définir la variable aléatoire associée au gain et déterminer sa loi de probabilité.*

2. Calculer l'espérance de gain pour chaque placement. Lequel des deux est le plus "rentable" en moyenne ?
3. Calculer la variance et l'écart type de gain pour chaque placement. Interpréter ces valeurs en termes de risque.
4. L'investisseur dispose de 10000 €. Il peut soit placer toute la somme dans un seul type de placement, soit diversifier en plaçant 5000 € dans A et 5000 € dans B. Que lui conseilleriez-vous, en justifiant votre choix en fonction de son profil (aversion au risque, recherche de gain maximal) ?

Exercice 4 Jeu de casino : La Roulette À la roulette, on parie sur un numéro (de 0 à 36). Si le numéro sort, on gagne 35 fois sa mise (on récupère sa mise plus 35 fois sa mise). Sinon, on perd sa mise.

1. Soit M la mise du joueur. Définir une variable aléatoire G correspondant au gain algébrique du joueur pour un pari sur un numéro.
2. Déterminer la loi de probabilité de G .
3. Calculer l'espérance de G . Que signifie ce résultat pour le joueur sur le long terme ? Et pour le casino ?
4. Si un joueur décide de parier 10 € sur le numéro 7 pendant 100 parties. On considère que les parties sont indépendantes. Comment pourriez-vous estimer son gain total à l'issue de ces 100 parties ? Quelles sont les limites de cette estimation ?
5. Existe-t-il une stratégie de mise (par exemple la martingale qui consiste à doubler sa mise après chaque perte) qui permettrait de s'assurer un gain à la roulette ? Justifier votre réponse.

1.3 Analyse de données et interprétation critique

Exercice 5 Analyse d'un sondage électoral À l'approche d'une élection, un institut de sondage publie les résultats suivants sur les intentions de vote pour le candidat A : 52% des voix avec une marge d'erreur de $\pm 3\%$ au seuil de confiance de 95%. Le sondage a été réalisé auprès de 1000 personnes.

1. Expliquer ce que signifie "marge d'erreur de $\pm 3\%$ au seuil de confiance de 95%".
2. Quel est l'intervalle de fluctuation (ou de confiance) associé à ce sondage ?
3. Le candidat B, crédité de 49% des intentions de vote dans un autre sondage (réalisé avec la même méthodologie et la même taille d'échantillon), affirme qu'il peut encore gagner l'élection. Son affirmation est-elle justifiée statistiquement ? Argumenter.
4. Pourquoi est-il important de connaître la taille de l'échantillon lors de l'interprétation d'un sondage ? Quel serait l'impact d'une taille d'échantillon plus grande ou plus petite sur la marge d'erreur ?
5. Discuter des limites d'un sondage. Quelles sont les sources d'incertitude qui ne sont pas prises en compte par la marge d'erreur statistique ?

Exercice 6 Diagnostic médical et proportions Une maladie rare affecte 0,1% de la population. Un test de dépistage est disponible.

- La sensibilité du test (probabilité d'avoir un test positif si on est malade) est de 99%.
- La spécificité du test (probabilité d'avoir un test négatif si on n'est pas malade) est de 98%.

Un individu est testé positivement.

1. Calculer la probabilité que cet individu soit réellement malade. Expliquer le raisonnement en détaillant les étapes de calcul.
2. Comment ce résultat peut-il être contre-intuitif ? Pourquoi est-il essentiel de considérer la prévalence de la maladie dans la population ?
3. Un patient se voit diagnostiquer la maladie suite à ce test positif. Il demande un deuxième avis médical et passe un second test, indépendant du premier, qui s'avère également positif. Quelle est alors la probabilité que ce patient soit réellement malade ? Commenter l'évolution de cette probabilité.