

Polycopié de Mathématiques - Première Générale

Géométrie

Juin 2025

Contents

1	Introduction à la Géométrie en Première Générale	2
1.1	Objectifs d'apprentissage	2
1.2	Aperçu historique	2
2	Calcul Vectoriel et Produit Scalaire	2
2.1	Définitions et Propriétés	3
2.2	Méthodes et Exemples	4
2.3	Démonstrations importantes	5
2.4	Approfondissements possibles	5
3	Géométrie Repérée	6
3.1	Vecteur normal à une droite	6
3.2	Équation de cercle	7
3.3	Parabole représentative d'une fonction polynôme du second degré	8
3.4	Approfondissements possibles	8

1 Introduction à la Géométrie en Première Générale

L'étude de la géométrie en classe de Première Générale s'inscrit dans la continuité des acquis du collège et de la classe de Seconde, où les élèves ont été familiarisés avec la géométrie de configuration, le calcul vectoriel et la géométrie repérée. Le programme de Première vise à enrichir ces connaissances en introduisant de nouveaux outils, notamment le produit scalaire, pour résoudre des problèmes géométriques, en particulier du point de vue métrique. L'objectif est également d'approfondir la géométrie repérée pour aborder des problèmes impliquant l'orthogonalité. Il est important que les élèves maintiennent une pratique du calcul vectoriel en géométrie non repérée.

1.1 Objectifs d'apprentissage

Les principaux objectifs de cette section sont les suivants:

- Acquérir de nouveaux outils efficaces pour la résolution de problèmes géométriques, en particulier le produit scalaire.
- Enrichir la géométrie repérée pour traiter des problèmes faisant intervenir l'orthogonalité.

1.2 Aperçu historique

La notion de vecteur, bien qu'implicite en mécanique depuis Galilée, a mis du temps à se formaliser. On observe un lien entre l'analyse et la géométrie à travers l'apparition de la notion de vecteur chez Leibniz, lors de ses recherches sur le calcul des variations. Le XIXe siècle a vu le développement conjoint du produit scalaire et de la notion de travail en physique. Le calcul vectoriel et le produit scalaire offrent une approche de la géométrie différente de celle des Anciens, combinant vision géométrique et calcul.

Les cercles sont parmi les plus anciens objets mathématiques étudiés. La caractérisation du cercle de diamètre AB comme l'ensemble des points M tels que le triangle AMB est rectangle en M est attribuée à Thalès. Cependant, c'est seulement au XVIIe siècle que Descartes a développé la méthode des coordonnées et écrit l'équation d'un cercle dans un repère orthonormé.

2 Calcul Vectoriel et Produit Scalaire

Le produit scalaire est un outil fondamental pour étudier les relations métriques et l'orthogonalité en géométrie.

2.1 Définitions et Propriétés

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

- Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, peut être défini de plusieurs manières:
 - À partir de la projection orthogonale: Si H est le projeté orthogonal de B sur la droite (OA) (où $\vec{u} = \vec{OA}$ et $\vec{v} = \vec{OB}$), alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{OA} \cdot \vec{OH}$. Si $\vec{OA}$ et $\vec{OH}$ sont de même sens, $\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OH$. Sinon, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -OA \times OH$.
 - À l'aide du cosinus de l'angle orienté: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.
- La **caractérisation de l'orthogonalité** est la suivante: deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul ($\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$).

Propriété

Le produit scalaire possède les propriétés suivantes:

- **Symétrie:** Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- **Bilinéarité:** Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et pour tout réel k :
 - $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
 - $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$
- **Expression en base orthonormée:** Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, si $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.
- **Norme d'un vecteur:** La norme d'un vecteur $\vec{u}(x; y)$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Le carré de la norme est $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$.
- **Critère d'orthogonalité en base orthonormée:** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

Propriété

Identités remarquables avec le produit scalaire: Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Propriété

Formule d'Al-Kashi (aussi appelée loi des cosinus): Dans un triangle ABC , on a: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos(\widehat{BAC})$.

Propriété

Transformation de l'expression $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$: Pour deux points A et B et un point M , et en notant I le milieu du segment $[AB]$: $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2$. Cette formule est utile pour déterminer des ensembles de points.

2.2 Méthodes et Exemples

Point de méthode

Pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, choisir la méthode la plus adaptée à la situation:

- **Avec les coordonnées** (si le repère est orthonormé): $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.
- **Avec les normes et un angle:** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.
- **Avec la projection orthogonale:** Utile quand un des vecteurs peut être projeté facilement sur la droite support de l'autre.
- **Avec les normes uniquement** (via les identités remarquables): $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.

Point de méthode

Pour démontrer une orthogonalité, utiliser le fait que deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Point de méthode

Pour calculer un angle ou une longueur dans le plan ou l'espace, utiliser les différentes expressions du produit scalaire, notamment la formule avec le cosinus ou la formule d'Al-Kashi.

Exemple

Exemple 1: Calcul d'un produit scalaire avec les coordonnées Soient $\vec{u}(2;3)$ et $\vec{v}(-1;4)$ dans un repère orthonormé. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$. *Solution:* En utilisant la formule avec les coordonnées: $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2) \times (-1) + (3) \times (4)$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 + 12$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 10$.

Exemple

Exemple 2: Démonstration d'orthogonalité Soient $A(1; 1)$, $B(4; 2)$ et $C(2; 5)$ trois points. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A . *Solution:* Pour démontrer que le triangle ABC est rectangle en A , il faut montrer que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire que leur produit scalaire est nul. Calculons les coordonnées des vecteurs: $\vec{AB} = (4 - 1; 2 - 1) = (3; 1)$ $\vec{AC} = (2 - 1; 5 - 1) = (1; 4)$ Calculons le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$: $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (3) \times (1) + (1) \times (4) = 3 + 4 = 7$. Le produit scalaire n'est pas nul, donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas orthogonaux. Par conséquent, le triangle ABC n'est pas rectangle en A . *Remarque pédagogique:* Il est important de bien vérifier les calculs. Si nous avions des coordonnées différentes, par exemple $A(1; 1)$, $B(3; 2)$ et $C(2; -1)$, alors $\vec{AB} = (2; 1)$ et $\vec{AC} = (1; -2)$. Leur produit scalaire serait $2 \times 1 + 1 \times (-2) = 2 - 2 = 0$. Dans ce cas, le triangle ABC serait rectangle en A .

Exemple

Exemple 3: Application de la formule d'Al-Kashi Dans un triangle ABC , $AB = 5$, $AC = 8$ et $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Calculer la longueur BC . *Solution:* En utilisant la formule d'Al-Kashi: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos(\widehat{BAC})$ $BC^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \times \cos(60^\circ)$ Nous savons que $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$. $BC^2 = 25 + 64 - 2 \times 5 \times 8 \times \frac{1}{2}$ $BC^2 = 89 - 40$ $BC^2 = 49$ $BC = \sqrt{49} = 7$.

2.3 Démonstrations importantes

Théorème

Démonstration de la formule d'Al-Kashi Soit un triangle ABC . On a $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$. Alors $BC^2 = \|\vec{BC}\|^2 = \vec{BC} \cdot \vec{BC} = (\vec{AC} - \vec{AB}) \cdot (\vec{AC} - \vec{AB})$. En utilisant la bilinéarité du produit scalaire: $BC^2 = \vec{AC} \cdot \vec{AC} - \vec{AC} \cdot \vec{AB} - \vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AB} \cdot \vec{AB}$ $BC^2 = \|\vec{AC}\|^2 - 2(\vec{AB} \cdot \vec{AC}) + \|\vec{AB}\|^2$ (car $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = \vec{AB} \cdot \vec{AC}$) $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2(AB \times AC \cos(\widehat{BAC}))$. Ceci démontre la formule d'Al-Kashi.

Théorème

Ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ Soient A et B deux points distincts. On cherche l'ensemble des points M du plan tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$. *Démonstration:* L'égalité $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ signifie que les vecteurs $\vec{MA}$ et $\vec{MB}$ sont orthogonaux. Géométriquement, cela signifie que le triangle AMB est rectangle en M . L'ensemble des points M tels que le triangle AMB est rectangle en M est le cercle de diamètre $[AB]$. Ce résultat est une propriété connue depuis l'Antiquité, notamment attribuée à Thalès.

2.4 Approfondissements possibles

- **Loi des sinus:** Dans un triangle ABC , on a $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, où a, b, c sont les longueurs des côtés opposés aux sommets A, B, C respectivement.
- **Droite d'Euler d'un triangle:** La droite d'Euler est une droite remarquable qui

passé par l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit d'un triangle.

- **Médianes d'un triangle:** Les médianes d'un triangle se coupent en un point unique appelé centre de gravité (ou barycentre), qui est situé aux deux tiers de chaque médiane à partir du sommet.

3 Géométrie Repérée

Dans cette section, le plan est muni d'un repère orthonormé.

3.1 Vecteur normal à une droite

Définition

Un **vecteur normal** à une droite est un vecteur non nul qui est orthogonal à tout vecteur directeur de cette droite.

Propriété

Si une droite D a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$, alors:

- Le vecteur $\vec{n}(a; b)$ est un vecteur normal à la droite D .
- Le vecteur $\vec{d}(-b; a)$ est un vecteur directeur de la droite D .

Point de méthode

Pour déterminer une équation cartésienne d'une droite connaissant un point et un vecteur normal: Soit une droite D passant par un point $A(x_A; y_A)$ et ayant pour vecteur normal $\vec{n}(a; b)$. Un point $M(x; y)$ appartient à la droite D si et seulement si $\vec{AM}$ est orthogonal à $\vec{n}$. C'est-à-dire $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Les coordonnées de $\vec{AM}$ sont $(x - x_A; y - y_A)$. Donc $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$. Cette équation peut être développée pour obtenir la forme $ax + by + c = 0$.

Exemple

Exemple 4: Déterminer une équation de droite à partir d'un point et d'un vecteur normal Déterminer une équation cartésienne de la droite D passant par $A(1; 2)$ et ayant pour vecteur normal $\vec{n}(3; -1)$. *Solution:* Un point $M(x; y)$ appartient à la droite D si $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$. $\vec{AM} = (x - 1; y - 2)$. Donc $3(x - 1) + (-1)(y - 2) = 0$. $3x - 3 - y + 2 = 0$ $3x - y - 1 = 0$. L'équation de la droite D est $3x - y - 1 = 0$.

Point de méthode

Pour déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite: Soit un point P et une droite D . Le projeté orthogonal H de P sur D est le point d'intersection de D avec la droite perpendiculaire à D et passant par P .

1. Déterminer l'équation de la droite D' . C'est la droite passant par P et dont un vecteur directeur est un vecteur normal de D .
2. Résoudre le système d'équations formé par l'équation de D et l'équation de D' pour trouver les coordonnées de H .

Exemple

Exemple 5: Projeté orthogonal d'un point sur une droite Soit $P(5;1)$ et la droite D d'équation $x - 2y + 3 = 0$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de P sur D . *Solution:* Un vecteur normal de D est $\vec{n}(1; -2)$. Ce vecteur est un vecteur directeur de la droite D' passant par P et perpendiculaire à D . L'équation paramétrique de D' est: $x = 5 + t$ $y = 1 - 2t$ Substituons ces expressions dans l'équation de D pour trouver t : $(5 + t) - 2(1 - 2t) + 3 = 0$ $5 + t - 2 + 4t + 3 = 0$ $6 + 5t = 0$ $5t = -6 \Rightarrow t = -\frac{6}{5}$. Maintenant, substituons t dans les équations de D' pour trouver les coordonnées de H : $x_H = 5 + (-\frac{6}{5}) = \frac{25-6}{5} = \frac{19}{5}$ $y_H = 1 - 2(-\frac{6}{5}) = 1 + \frac{12}{5} = \frac{5+12}{5} = \frac{17}{5}$ Donc, le projeté orthogonal H a pour coordonnées $(\frac{19}{5}; \frac{17}{5})$.

3.2 Équation de cercle

Propriété

L'équation d'un cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon R est donnée par $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

Point de méthode

Pour déterminer et utiliser l'équation d'un cercle donné par son centre et son rayon: Substituer directement les coordonnées du centre et la valeur du rayon dans l'équation standard.

Point de méthode

Pour reconnaître une équation de cercle, et déterminer son centre et son rayon: Une équation de la forme $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ peut être celle d'un cercle. Pour trouver le centre et le rayon, compléter les carrés: $(x^2 + Dx) + (y^2 + Ey) + F = 0$ $(x + \frac{D}{2})^2 - (\frac{D}{2})^2 + (y + \frac{E}{2})^2 - (\frac{E}{2})^2 + F = 0$ $(x + \frac{D}{2})^2 + (y + \frac{E}{2})^2 = (\frac{D}{2})^2 + (\frac{E}{2})^2 - F$ Le centre est $\Omega(-\frac{D}{2}; -\frac{E}{2})$ et le rayon $R = \sqrt{(\frac{D}{2})^2 + (\frac{E}{2})^2 - F}$. Il faut que l'expression sous la racine soit positive pour que ce soit un cercle.

Exemple

Exemple 6: Équation d'un cercle à partir du centre et du rayon Déterminer l'équation du cercle de centre $\Omega(-1; 3)$ et de rayon $R = 4$. *Solution:* En utilisant la formule $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$: $(x - (-1))^2 + (y - 3)^2 = 4^2$ $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$.

Exemple

Exemple 7: Reconnaître l'équation d'un cercle L'équation $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$ est-elle celle d'un cercle ? Si oui, déterminer son centre et son rayon. *Solution:* Complétons les carrés: $(x^2 - 6x) + (y^2 + 2y) - 6 = 0$ $(x^2 - 6x + 9) - 9 + (y^2 + 2y + 1) - 1 - 6 = 0$ $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 - 16 = 0$ $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$. C'est bien l'équation d'un cercle. Le centre est $\Omega(3; -1)$ et le rayon est $R = \sqrt{16} = 4$.

3.3 Parabole représentative d'une fonction polynôme du second degré

Définition

La **parabole** représentative d'une fonction polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) est une courbe symétrique.

Propriété

Pour une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$:

- L' **axe de symétrie** est la droite verticale d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.
- Le **sommet** de la parabole est le point $S(-\frac{b}{2a}; f(-\frac{b}{2a}))$.

Point de méthode

Pour déterminer l'axe de symétrie et le sommet d'une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$:

1. Identifier les coefficients a , b , c .
2. Calculer l'abscisse du sommet et de l'axe de symétrie: $x_S = -\frac{b}{2a}$.
3. Calculer l'ordonnée du sommet en substituant x_S dans l'expression de la fonction: $y_S = f(x_S)$.

Exemple

Exemple 8: Déterminer l'axe de symétrie et le sommet d'une parabole Soit la fonction $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$. Déterminer les coordonnées de son sommet et l'équation de son axe de symétrie. *Solution:* La fonction est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 2$, $b = -8$, $c = 5$. L'abscisse du sommet (et de l'axe de symétrie) est $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2 \times 2} = \frac{8}{4} = 2$. L'ordonnée du sommet est $y_S = f(2) = 2(2)^2 - 8(2) + 5 = 2(4) - 16 + 5 = 8 - 16 + 5 = -3$. Le sommet de la parabole est $S(2; -3)$. L'axe de symétrie a pour équation $x = 2$.

3.4 Approfondissements possibles

- **Recherche de l'ensemble des points équidistants de l'axe des abscisses et d'un point donné:** Cet ensemble de points est une parabole. Par exemple, l'ensemble des points $M(x; y)$ équidistants de la droite d'équation $y = k$ et d'un

point $F(x_F; y_F)$ est une parabole dont F est le foyer et la droite $y = k$ est la directrice.

- **Intersection d'un cercle ou d'une parabole avec une droite parallèle à un axe:** Cela implique la résolution de systèmes d'équations, souvent quadratiques, pour trouver les points d'intersection.