

Recueil d'Exercices de Réflexion - Géométrie

Mathématiques - Première Générale

Juin 2025

Contents

1	Situations de Recherche et Modélisation	2
1.1	Optimisation et lieux géométriques	2
1.2	Démonstrations et propriétés avancées	3
2	Problèmes ouverts et Contextes variés	3
2.1	Problèmes géométriques avec des contraintes	3

1 Situations de Recherche et Modélisation

1.1 Optimisation et lieux géométriques

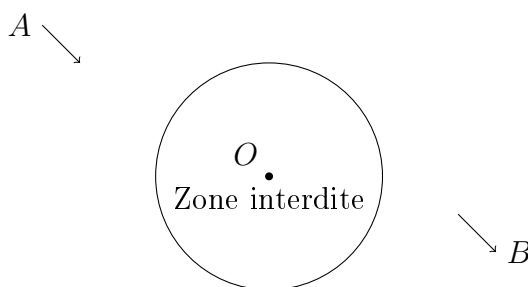
Exercice 1. Un point M se déplace sur un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R . Soient A et B deux points fixes du plan. On souhaite minimiser la longueur $AM^2 + BM^2$.

- Exprimer $AM^2 + BM^2$ en fonction de $\vec{OM}$, $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$.
- On note I le milieu du segment $[AB]$. Démontrer que $AM^2 + BM^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$.
- En déduire la position du point M pour laquelle la somme $AM^2 + BM^2$ est minimale.
- Appliquer ce résultat au cas où $A(1;0)$, $B(5;0)$ et $\mathcal{C}$ est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$. Déterminer les coordonnées de M pour que $AM^2 + BM^2$ soit minimale.

Exercice 2. Soit un triangle ABC non aplati. On définit la fonction f pour tout point M du plan par $f(M) = \vec{MA} \cdot \vec{MB} + \vec{MB} \cdot \vec{MC} + \vec{MC} \cdot \vec{MA}$.

- En utilisant le point G (centre de gravité du triangle ABC), exprimer $f(M)$ en fonction de MG^2 et de constantes liées au triangle ABC . (Rappel: $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$)
- Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = 0$. Quelle est la nature de cet ensemble ?

Exercice 3. Un avion décolle d'un point A pour atteindre un point B . Pour des raisons de sécurité, il doit voler à une distance constante d d'une zone interdite circulaire de centre O et de rayon R . Modéliser cette situation à l'aide d'équations de cercles et de droites. Décrire la trajectoire de l'avion en fonction des positions de A , B et de la zone interdite. *On pourra considérer O comme l'origine d'un repère orthonormé.*



Exercice 4. On considère un demi-cercle de diamètre $[AB]$. Soit M un point sur ce demi-cercle. On projette M orthogonalement sur (AB) en H .

- Exprimer le produit scalaire $\vec{AM} \cdot \vec{BM}$ en fonction de AB , AM et BM .
- Démontrer que $MH^2 = AH \cdot HB$.
- On fixe $AB = 10$. Où doit se situer M pour que MH soit maximal ? Quelle est la valeur maximale de MH ?

1.2 Démonstrations et propriétés avancées

- Exercice 5. **Théorème de la médiane:** Soit un triangle ABC . On note I le milieu de $[BC]$. Démontrer, en utilisant le produit scalaire, que $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$. *Indication: Partir de $\vec{AB} = \vec{AI} + \vec{IB}$ et $\vec{AC} = \vec{AI} + \vec{IC}$.*
- Exercice 6. Soit un parallélogramme $ABCD$. Démontrer, en utilisant le produit scalaire, que la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés. C'est-à-dire $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.
- Exercice 7. Dans un repère orthonormé, on considère un point $P(x_P; y_P)$ et une droite D d'équation $ax + by + c = 0$. Démontrer que la distance du point P à la droite D est donnée par la formule: $d(P, D) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. *Indication: Soit H le projeté orthogonal de P sur D . Exprimer $\vec{PH}$ en fonction du vecteur normal $\vec{n}(a; b)$ et utiliser le produit scalaire $\vec{PH} \cdot \vec{n}$.*
- Exercice 8. Soient trois points A, B, C non alignés. On considère un point M du plan. Démontrer que si M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC , alors $\vec{MA} \cdot \vec{MB} + \vec{MB} \cdot \vec{MC} + \vec{MC} \cdot \vec{MA} = R^2 - \left(\frac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{4}\right)$, où R est le rayon du cercle circonscrit.
- Exercice 9. On considère un repère orthonormé. Soit $A(x_A; y_A)$ un point et r un réel positif. Déterminer la nature de l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $x^2 + y^2 - 2x_Ax - 2y_Ay + x_A^2 + y_A^2 - r^2 = 0$. Expliquer la démarche pour aboutir à la conclusion.

2 Problèmes ouverts et Contextes variés

2.1 Problèmes géométriques avec des contraintes

- Exercice 10. Un sculpteur souhaite créer une œuvre d'art en forme de parabole. Il dispose d'une feuille de métal qu'il veut découper. Il modélise la forme de la parabole par la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$. Il souhaite que le sommet de la parabole soit au point $S(2; -1)$ et que la parabole passe par le point $P(0; 3)$. Déterminer l'équation de cette parabole. Le sculpteur décide ensuite d'ajouter un élément rectiligne qui est tangent à la parabole au point $P(0; 3)$. Déterminer l'équation de cette droite tangente.
- Exercice 11. Dans un plan muni d'un repère orthonormé, on considère un point $F(0; p)$ et une droite D d'équation $y = -p$, où p est un réel non nul. Déterminer l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan qui sont équidistants du point F et de la droite D . Quelle est la nature de cette courbe ? Quelles sont ses caractéristiques géométriques ?
- Exercice 12. Un archer tire une flèche vers une cible circulaire. La cible a un rayon de $R = 50$ cm et son centre est au point $C(0; 0)$ dans un repère où les distances sont en cm. La trajectoire de la flèche peut être modélisée par une droite. L'archer tire de la position $A(-100; -20)$ et la flèche passe par le point $B(-50; 10)$.
- Déterminer l'équation de la droite représentant la trajectoire de la flèche.
 - La flèche atteint-elle la cible ? Si oui, déterminer les coordonnées des points d'impact (s'il y en a).

-
- c) Si la cible n'est pas atteinte, à quelle distance minimale la flèche passe-t-elle du centre de la cible ?

Exercice 13. Soit un triangle ABC . On considère un point M mobile sur le segment $[BC]$. On note P le projeté orthogonal de M sur (AB) et Q le projeté orthogonal de M sur (AC) . Le but est de déterminer la position de M sur $[BC]$ pour laquelle la longueur PQ est minimale. *Indication: On pourra utiliser un repère et/ou des propriétés du produit scalaire. Penser à la notion de cercle de diamètre.*

Exercice 14. Deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont pour équations respectives : $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$
 $\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$

- Déterminer le centre et le rayon de chacun des cercles.
- Montrer que ces deux cercles sont sécants.
- Déterminer l'équation de la droite qui passe par les deux points d'intersection de ces cercles.
- Que représente cette droite pour les deux cercles ?