
Cours de Mathématiques — Première Générale

Analyse

0.1 Objectifs généraux de la partie Analyse

La partie "Analyse" du programme de Première Générale se concentre sur deux concepts fondamentaux : la dérivée et ses applications à l'étude des fonctions, ainsi que la fonction exponentielle.

Le concept de dérivée

L'étude de la dérivation aborde à la fois le point de vue local (nombre dérivé) et le point de vue global (fonction dérivée). Les fonctions étudiées sont toutes régulières, et le nombre dérivé est introduit intuitivement comme la limite du taux de variation. Il n'y a pas de définition formelle de la limite, mais on s'appuie sur :

- Des représentations graphiques fournies par des logiciels (calculatrice, tableur, logiciel de géométrie dynamique).
- Le calcul algébrique du taux de variation pour des fonctions simples comme la fonction carré ou la fonction inverse.
- Le calcul numérique d'expressions de la forme $f(a + h) - f(a)$ pour de petites valeurs de h , illustrant l'approximation linéaire, par exemple avec $a = 1$ et f étant la fonction carré, inverse, ou racine carrée.

Il est recommandé d'exploiter ces différents registres pour l'étude d'un même nombre dérivé. Le taux de variation et le nombre dérivé peuvent être illustrés dans divers contextes :

- En géométrie, ils représentent la pente d'une sécante et la pente d'une tangente.
- En cinématique, un taux de variation peut être interprété comme une vitesse moyenne, et un nombre dérivé comme une vitesse instantanée.
- En économie, le nombre dérivé est lié au coût marginal.

Remarque

En liaison avec les autres disciplines, il est possible d'utiliser la notation $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pour un taux de variation et $\frac{dy}{dx}$ pour une dérivée ; si $y = f(x)$, on peut écrire $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, en l'adaptant selon le contexte : $x = f(t)$, $q = f(t)$, etc..

0.2 Histoire des mathématiques

Le calcul différentiel s'est imposé grâce à sa capacité à résoudre des problèmes variés (cinématique, mécanique, géométrie, optimisation). Le développement du calcul des variations par Leibniz et Newton repose sur l'hypothèse que les phénomènes naturels évoluent linéairement sous l'effet de petites variations. Leurs approches initiales se basaient sur des notions intuitives mais imprécises d'infiniment petit. Les notions de limites et de différentielles, qui sont à la base de l'exposé actuel, n'ont été clarifiées que progressivement au XIXe siècle.

La notation exponentielle et les fonctions exponentielles sont apparues vers la fin du XVII^e siècle, dans le but de traiter des phénomènes de croissance similaires aux intérêts composés. La modélisation de ces situations conduit naturellement à caractériser la fonction exponentielle comme la seule fonction vérifiant l'équation différentielle $y' = y$ et la condition initiale $y(0) = 1$.

La trigonométrie était utilisée par les Anciens pour divers problèmes (géométrie, géographie, astronomie). À cette époque, elle reposait sur la fonction corde, qui était moins facile à manipuler que les fonctions sinus et cosinus utilisées aujourd'hui.

0.3 Dérivation

0.3.1 Point de vue local

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. Le **taux de variation** de f entre a et $a + h$ (où $h \neq 0$ et $a + h \in I$) est donné par l'expression :

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Graphiquement, ce taux de variation représente la **pente de la sécante** à la courbe représentative de f passant par les points $(a, f(a))$ et $(a + h, f(a + h))$.

Propriété

Le **nombre dérivé** d'une fonction f en un point a , noté $f'(a)$, est la limite du taux de variation lorsque h tend vers 0 :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Si cette limite existe et est finie, on dit que la fonction f est dérivable en a .

Définition

La **tangente** à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est la droite qui passe par le point $(a, f(a))$ et dont la pente est égale au nombre dérivé $f'(a)$. L'équation de cette tangente est donnée par :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Point de méthode**Déterminer graphiquement un nombre dérivé et construire une tangente :**

1. Pour déterminer graphiquement $f'(a)$, tracez la tangente à la courbe au point d'abscisse a .
2. Choisissez deux points distincts sur cette tangente et calculez la pente de la droite. Cette pente est $f'(a)$.
3. Pour construire la tangente en un point $(a, f(a))$ connaissant $f'(a)$, placez le point $(a, f(a))$. À partir de ce point, déplacez-vous de 1 unité horizontalement (vers la droite ou la gauche) et de $f'(a)$ unités verticalement (vers le haut si $f'(a) > 0$, vers le bas si $f'(a) < 0$). Tracez la droite passant par ces deux points.

Exemple : Calcul du nombre dérivé de la fonction carré en un point.

Soit $f(x) = x^2$. Calculons le nombre dérivé en $a = 2$.

1. **Calcul du taux de variation :**

$$\begin{aligned}\frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} \\ &= \frac{(4 + 4h + h^2) - 4}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = 4 + h\end{aligned}$$

2. **Calcul de la limite :**

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} (4 + h) = 4$$

Le nombre dérivé de $f(x) = x^2$ en $x = 2$ est $f'(2) = 4$.

Point de méthode**Déterminer l'équation de la tangente en un point à la courbe représentative d'une fonction :**

1. Calculez $f(a)$ pour le point d'abscisse a .
2. Calculez le nombre dérivé $f'(a)$.
3. Utilisez la formule de l'équation de la tangente : $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Exemple : Équation de la tangente à $f(x) = x^2$ en $x = 2$.

Nous avons $f(2) = 2^2 = 4$ et $f'(2) = 4$. L'équation de la tangente est $y = f(2) + f'(2)(x - 2)$, soit :

$$y = 4 + 4(x - 2)$$

$$y = 4 + 4x - 8$$

$$y = 4x - 4$$

0.3.2 Point de vue global

Définition

Une fonction f est dite **dérivable sur un intervalle** si elle est dérivable en tout point de cet intervalle. La **fonction dérivée** de f , notée f' , est la fonction qui à chaque x de l'intervalle associe le nombre dérivé $f'(x)$.

Propriété

Fonctions dérivées usuelles :

- Fonction constante $f(x) = c : f'(x) = 0$
- Fonction identité $f(x) = x : f'(x) = 1$
- Fonction carré $f(x) = x^2 : f'(x) = 2x$
- Fonction cube $f(x) = x^3 : f'(x) = 3x^2$
- Fonction puissance $f(x) = x^n$ (pour $n \in \mathbb{Z}$) : $f'(x) = nx^{n-1}$
- Fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x} : f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
- Fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x} : f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (pour $x > 0$)

Propriété

Opérations sur les fonctions dérivables : Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , et k un réel.

- **Somme** : $(u + v)' = u' + v'$
- **Produit par un réel** : $(ku)' = ku'$
- **Produit** : $(uv)' = u'v + uv'$
- **Inverse** : Si $v(x) \neq 0$ sur I , alors $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
- **Quotient** : Si $v(x) \neq 0$ sur I , alors $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- **Fonction affine composée** : Si $g(x) = f(ax + b)$, alors $g'(x) = af'(ax + b)$.

Point de méthode

Calculer une fonction dérivée en utilisant les propriétés des opérations sur les fonctions dérivables :

1. Identifiez la structure de la fonction (somme, produit, quotient, etc.).
2. Décomposez la fonction en fonctions élémentaires dont vous connaissez les dérivées.
3. Appliquez les règles d'opérations correspondantes.

Exemple : Calcul de fonctions dérivées.

1. Soit $f(x) = 3x^4 - 2x + 5$. C'est une somme de fonctions. $f'(x) = (3x^4)' - (2x)' + (5)' = 3(4x^3) - 2(1) + 0 = 12x^3 - 2$.
2. Soit $g(x) = (x^2 + 1)(2x - 3)$. C'est un produit uv avec $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = 2x - 3$. $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 2$. $g'(x) = u'v + uv' = (2x)(2x - 3) + (x^2 + 1)(2)$
 $g'(x) = 4x^2 - 6x + 2x^2 + 2 = 6x^2 - 6x + 2$.
3. Soit $h(x) = \frac{1}{x+2}$. C'est de la forme $\frac{1}{v}$ avec $v(x) = x + 2$. $v'(x) = 1$. $h'(x) = -\frac{v'}{v^2} = -\frac{1}{(x+2)^2}$.
4. Soit $k(x) = \frac{x}{x^2+1}$. C'est un quotient $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = x^2 + 1$. $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x$. $k'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(1)(x^2+1) - (x)(2x)}{(x^2+1)^2}$ $k'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$.

0.3.3 Cas particulier de la fonction valeur absolue

La fonction valeur absolue, $f(x) = |x|$, n'est pas dérivable en 0.

Propriété

La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0. On peut le démontrer en étudiant la limite de son taux de variation en 0. Soit $f(x) = \sqrt{x}$. Le taux de variation en 0 est $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$ pour $h > 0$. Lorsque $h \rightarrow 0^+$, $\frac{1}{\sqrt{h}} \rightarrow +\infty$. Donc, la limite n'est pas finie, et la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

0.3.4 Démonstrations

- **Équation de la tangente en un point à une courbe représentative** : Soit f une fonction dérivable en a . Le nombre dérivé $f'(a)$ est la pente de la tangente à la courbe représentative de f au point $A(a, f(a))$. L'équation d'une droite de pente m passant par un point (x_A, y_A) est $y - y_A = m(x - x_A)$. En remplaçant m par $f'(a)$, x_A par a et y_A par $f(a)$, on obtient : $y - f(a) = f'(a)(x - a)$, ce qui est équivalent à $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.
- **Fonction dérivée de la fonction carrée** : Soit $f(x) = x^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le taux de variation entre x et $x + h$ est : $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$. Lorsque $h \rightarrow 0$, $2x + h \rightarrow 2x$. Donc $f'(x) = 2x$.
- **Fonction dérivée de la fonction inverse** : Soit $f(x) = \frac{1}{x}$. Pour tout $x \neq 0$, le taux de variation entre x et $x + h$ (avec $x + h \neq 0$) est : $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h} = \frac{-h}{hx(x+h)} = -\frac{1}{x(x+h)}$. Lorsque $h \rightarrow 0$, $-\frac{1}{x(x+h)} \rightarrow -\frac{1}{x^2}$. Donc $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
- **Fonction dérivée d'un produit** : Soient u et v deux fonctions dérivables. La dérivée du produit uv est $(uv)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$. On ajoute et soustrait le terme $u(x)v(x+h)$ au numérateur : $(uv)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h) + u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$
 $(uv)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(x+h) + u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right)$ Comme u et v sont dérivables, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x)$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = v'(x)$. De plus, comme v est dérivable, elle est continue, donc $\lim_{h \rightarrow 0} v(x+h) = v(x)$. Ainsi, $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

0.3.5 Exemple d'algorithme

Point de méthode

Écrire la liste des coefficients directeurs des sécantes pour un pas donné.

Soit une fonction f , un point a , et un pas h . On peut calculer les pentes des sécantes passant par $(a, f(a))$ et $(a + nh, f(a + nh))$ pour différentes valeurs de n .

```
def calculer_pentes_secantes(f, a, h_values):
    pentes = []
    for h in h_values:
        if h != 0:
            pente = (f(a + h) - f(a)) / h
            pentes.append(pente)
    return pentes

# Exemple d'utilisation avec f(x) = x^2, a = 1
# h_values = [0.1, 0.01, 0.001, -0.1, -0.01, -0.001]
# f_exemple = lambda x: x**2
# resultats = calculer_pentes_secantes(f_exemple, 1, h_values)
# print(resultats)
# On observerait des valeurs proches de 2 (f'(1) pour x^2).
```

0.4 Variations et courbes représentatives des fonctions

Propriété

Lien entre le sens de variation d'une fonction et le signe de sa fonction dérivée : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si $f'(x) > 0$ sur I , alors f est strictement croissante sur I .
- Si $f'(x) < 0$ sur I , alors f est strictement décroissante sur I .
- Si $f'(x) = 0$ sur I , alors f est constante sur I .

Propriété

Nombre dérivé en un extremum : Si une fonction f présente un extremum (maximum ou minimum local) en un point a où elle est dérivable, alors $f'(a) = 0$. Graphiquement, la tangente à la courbe en ce point est horizontale. **Attention :** La réciproque n'est pas toujours vraie. $f'(a) = 0$ n'implique pas nécessairement un extremum (par exemple, $f(x) = x^3$ en $x = 0$).

Point de méthode

Étudier les variations d'une fonction et déterminer les extremums :

1. Déterminez l'ensemble de définition de la fonction f .
2. Calculez la fonction dérivée $f'(x)$.
3. Étudiez le signe de $f'(x)$ sur l'ensemble de définition. Pour cela, vous pouvez résoudre $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$ et $f'(x) = 0$.
4. Dressez le tableau de variations de f , en indiquant les intervalles où f est croissante ou décroissante, et les valeurs des extremums locaux (s'ils existent).
5. Pour chaque valeur x_0 où $f'(x_0) = 0$ et où le signe de $f'(x)$ change, $f(x_0)$ est un extremum local.

Exemple : Étude des variations de $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculons la dérivée : $f'(x) = 3x^2 - 3$.
3. Étudions le signe de $f'(x)$: $f'(x) = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$. Les racines sont $x = 1$ et $x = -1$.
 - Si $x < -1$, $(x - 1)$ est négatif et $(x + 1)$ est négatif, donc $f'(x)$ est positif.
 - Si $-1 < x < 1$, $(x - 1)$ est négatif et $(x + 1)$ est positif, donc $f'(x)$ est négatif.
 - If $x > 1$, $(x - 1)$ is positive and $(x + 1)$ is positive, so $f'(x)$ is positive.
4. Tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
Variations de f		$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$

On calcule $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = -1 + 3 + 1 = 3$. (Maximum local) On calcule $f(1) = (1)^3 - 3(1) + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$. (Minimum local)

Point de méthode

Résoudre un problème d'optimisation :

1. Modélisez le problème en définissant une fonction $f(x)$ qui représente la grandeur à optimiser (maximiser ou minimiser).
2. Déterminez l'ensemble de définition de cette fonction.
3. Calculez la fonction dérivée $f'(x)$.
4. Recherchez les valeurs de x pour lesquelles $f'(x) = 0$.
5. Étudiez le signe de $f'(x)$ pour déterminer les variations de f et identifier les extremums.
6. Vérifiez si les extremums trouvés correspondent bien à un maximum ou un minimum global dans le contexte du problème.

Exemple : Optimisation.

Un fabricant souhaite construire une boîte sans couvercle avec une base carrée, en utilisant 108 cm^2 de carton. Quelles dimensions doit avoir la boîte pour que son volume soit maximal ?

- Modélisation :** Soit x la longueur du côté de la base carrée et h la hauteur de la boîte. La surface de carton utilisée est l'aire de la base plus l'aire des quatre côtés : $A = x^2 + 4xh$. On sait que $A = 108$, donc $x^2 + 4xh = 108$. On exprime h en fonction de x : $4xh = 108 - x^2 \implies h = \frac{108-x^2}{4x}$. Le volume de la boîte est $V = x^2h$. En substituant h , on obtient le volume en fonction de x : $V(x) = x^2 \left(\frac{108-x^2}{4x} \right) = \frac{x(108-x^2)}{4} = \frac{108x-x^3}{4} = 27x - \frac{1}{4}x^3$.
- Ensemble de définition :** Pour que les dimensions soient valides, $x > 0$ et $h > 0$. $h > 0 \implies \frac{108-x^2}{4x} > 0 \implies 108 - x^2 > 0$ (car $x > 0$). $x^2 < 108 \implies x < \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \approx 10.39$. Donc, l'ensemble de définition pour $V(x)$ est $]0, 6\sqrt{3}[$.
- Calcul de la dérivée :** $V'(x) = 27 - \frac{3}{4}x^2$.
- Recherche des valeurs où $V'(x) = 0$:** $27 - \frac{3}{4}x^2 = 0 \implies \frac{3}{4}x^2 = 27 \implies 3x^2 = 108 \implies x^2 = 36 \implies x = 6$ (puisque $x > 0$).
- Étude du signe de $V'(x)$:** $V'(x) = \frac{3}{4}(36-x^2) = \frac{3}{4}(6-x)(6+x)$. Sur l'intervalle $]0, 6\sqrt{3}[$:
 - Si $0 < x < 6$, $(6-x) > 0$ et $(6+x) > 0$, donc $V'(x) > 0$.
 - If $x = 6$, $V'(x) = 0$.
 - If $6 < x < 6\sqrt{3}$, $(6-x) < 0$ and $(6+x) > 0$, so $V'(x) < 0$.

Tableau de variations :

x	0	6	$6\sqrt{3}$
Signe de $V'(x)$	+	0	−
Variations de V	$\nearrow$	$V(6)$	$\searrow$

Le volume est maximal pour $x = 6$.

- Dimensions de la boîte pour un volume maximal :** Si $x = 6 \text{ cm}$, alors $h = \frac{108-6^2}{4 \times 6} = \frac{108-36}{24} = \frac{72}{24} = 3 \text{ cm}$. Le volume maximal est $V(6) = 27(6) - \frac{1}{4}(6)^3 = 162 - \frac{216}{4} = 162 - 54 = 108 \text{ cm}^3$.

Point de méthode

Exploiter les variations d'une fonction pour établir une inégalité ou étudier la position relative de deux courbes :

- Pour établir une inégalité du type $f(x) \geq 0$: Étudiez les variations de f . Si le minimum de f est positif (ou nul), alors $f(x) \geq 0$ pour tout x dans l'intervalle.
- Pour étudier la position relative de deux courbes représentatives C_f et C_g : Considérez la fonction différence $d(x) = f(x) - g(x)$.
 - If $d(x) > 0$, alors C_f est au-dessus de C_g .
 - If $d(x) < 0$, alors C_f est en-dessous de C_g .
 - If $d(x) = 0$, les courbes se coupent.
 Étudiez le signe de $d(x)$ en utilisant ses variations.

0.4.1 Étude des fonctions polynômes du second degré

En lien avec la dérivation, l'étude des fonctions polynômes du second degré ($f(x) = ax^2 + bx + c$) permet de revoir les variations, les extremums, et l'allure de la parabole en fonction du signe du coefficient a .

- La dérivée est $f'(x) = 2ax + b$.
- Le signe de $f'(x)$ dépend du signe de a .
- Le sommet de la parabole, qui est l'extremum, est atteint lorsque $f'(x) = 0$, soit $x = -\frac{b}{2a}$.
- Si $a > 0$, la parabole est "ouverte vers le haut" (minimum).
- Si $a < 0$, la parabole est "ouverte vers le bas" (maximum).

0.4.2 Exemple d'algorithme

Point de méthode

Méthode de Newton pour trouver des racines.

La méthode de Newton est une méthode itérative pour trouver des approximations de plus en plus précises des racines (zéros) d'une fonction réelle. L'idée est de partir d'une approximation initiale x_0 et de construire la suite (x_{n+1}) par la formule :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Attention : Cette méthode n'est pas toujours convergente et nécessite $f'(x_n) \neq 0$.

```
def newton_method(f, f_prime, x0, tolerance=1e-7, max_iterations=100):
    x = x0
    for i in range(max_iterations):
        fx = f(x)
        f_prime_x = f_prime(x)
        if abs(f_prime_x) < 1e-10: # Éviter la division par zéro
            print("Dérivée trop proche de zéro, la méthode de Newton pourrait diverger")
            return None

        x_new = x - fx / f_prime_x
        if abs(x_new - x) < tolerance:
            return x_new
        x = x_new
    print("La méthode de Newton n'a pas convergé après", max_iterations, "itérations.")
    return None

# Exemple pour trouver la racine de f(x) = x^2 - 2 (racine est sqrt(2))
# f_sqrt2 = lambda x: x**2 - 2
# f_prime_sqrt2 = lambda x: 2*x
# approx_racine = newton_method(f_sqrt2, f_prime_sqrt2, 1.0)
# print(approx_racine) # Devrait être proche de 1.41421356
```

0.5 Fonction exponentielle

Définition

La **fonction exponentielle** est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie les deux conditions suivantes :

- $f'(x) = f(x)$ (sa dérivée est elle-même)
- $f(0) = 1$

Elle est notée $\exp(x)$ ou e^x . L'existence et l'unicité de cette fonction sont admises.

Propriété

Propriétés algébriques de la fonction exponentielle : Pour tous réels x et y :

- $e^{x+y} = e^x e^y$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ (en particulier $e^x e^{-x} = 1$)
- $(e^x)^n = e^{nx}$ pour tout entier n .

Le nombre e est la valeur de la fonction exponentielle en 1, c'est-à-dire $e = \exp(1) \approx 2.71828$.

Propriété

Sens de variation et signe de la fonction exponentielle :

- Pour tout réel x , $e^x > 0$ (la fonction exponentielle est strictement positive).
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée $f'(x) = e^x$ est toujours positive.

Propriété

Lien avec les suites géométriques : Pour tout réel a , la suite (e^{na}) est une suite géométrique de raison e^a .

Point de méthode

Transformer une expression en utilisant les propriétés algébriques de la fonction exponentielle :

1. Identifiez les produits, quotients, puissances d'exponentielles.
2. Appliquez les règles $e^A e^B = e^{A+B}$, $\frac{e^A}{e^B} = e^{A-B}$, $(e^A)^n = e^{nA}$.

Exemple : Simplification d'expressions.

- $e^2 \times e^3 = e^{2+3} = e^5$
- $\frac{e^{5x}}{e^{2x}} = e^{5x-2x} = e^{3x}$
- $(e^{-x})^2 = e^{-2x}$
- $e^{x+1} \times e^{2-x} = e^{(x+1)+(2-x)} = e^3$

Point de méthode

Modéliser une situation par une croissance ou une décroissance exponentielle :

1. Identifiez si le phénomène présente un taux d'évolution constant par unité de temps.
2. Pour une croissance (par exemple, évolution d'un capital à taux fixe) : la quantité à l'instant t peut être modélisée par $Q(t) = Q_0 e^{kt}$ avec $k > 0$.
3. Pour une décroissance (par exemple, décroissance radioactive) : la quantité à l'instant t peut être modélisée par $Q(t) = Q_0 e^{-kt}$ avec $k > 0$.
4. La constante k est liée au taux de croissance/décroissance.

Exemple : Décroissance radioactive.

La quantité d'une substance radioactive diminue de moitié tous les 10 ans. Si on part de 100g, quelle quantité restera-t-il après 30 ans ? Soit $Q(t)$ la quantité de substance à l'instant t (en années). On a $Q(t) = Q_0 e^{-kt}$. $Q_0 = 100$. On sait que $Q(10) = \frac{1}{2}Q_0$. Donc $Q_0 e^{-10k} = \frac{1}{2}Q_0 \implies e^{-10k} = \frac{1}{2}$. Pour trouver k , on prend le logarithme népérien : $-10k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) \implies k = \frac{\ln(2)}{10}$. Ainsi, $Q(t) = 100e^{-\frac{\ln(2)}{10}t} = 100(e^{\ln(2)})^{-\frac{t}{10}} = 100 \times 2^{-\frac{t}{10}}$. Après 30 ans : $Q(30) = 100 \times 2^{-\frac{30}{10}} = 100 \times 2^{-3} = 100 \times \frac{1}{8} = 12.5\text{g}$.

0.5.1 Exemples d'algorithme

Point de méthode

Construction de l'exponentielle par la méthode d'Euler. Détermination d'une valeur approchée de e à l'aide de la suite $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

- **Méthode d'Euler pour e^x** : La méthode d'Euler permet d'approcher la solution d'une équation différentielle. Pour $y' = y$ avec $y(0) = 1$, on peut itérer : $y_{n+1} = y_n + h y_n = y_n(1 + h)$, avec $y_0 = 1$. Pour $x = 1$, en prenant $h = 1/N$, on obtient $y_N \approx e$.

```
def euler_exp(x, N):  
    h = x / N  
    y = 1.0  
    for _ in range(N):  
        y = y * (1 + h)  
    return y
```

```
# print(euler_exp(1, 1000)) # Approximation de e  
# print(euler_exp(2, 1000)) # Approximation de e^2
```

- **Approximation de e avec la suite $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$** : La suite $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ converge vers e .

```
def approx_e(n):  
    return (1 + 1/n)**n
```

```
# for i in [1, 10, 100, 1000, 10000]:  
#     print(f"n={i}, approx_e={approx_e(i)}")
```

0.6 Fonctions trigonométriques

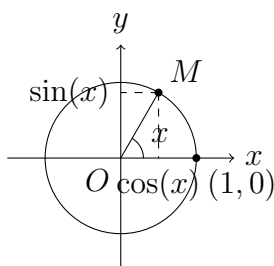
Définition

Le **cercle trigonométrique** est un cercle de rayon 1, centré à l'origine d'un repère orthonormé, orienté dans le sens direct (sens inverse des aiguilles d'une montre). Un angle est mesuré en **radians**. La longueur d'un arc de cercle sur le cercle trigonométrique est égale à la mesure de l'angle en radians correspondant à cet arc.

Définition

Pour tout nombre réel x , on lui associe un unique point M sur le cercle trigonométrique. Ce point M est obtenu en enroulant la droite réelle sur le cercle trigonométrique, de telle sorte que le point 0 de la droite corresponde au point $(1, 0)$ du cercle. Les coordonnées du point M sont $(\cos(x), \sin(x))$.

- $\cos(x)$ est l'abscisse du point M .
- $\sin(x)$ est l'ordonnée du point M .



Propriété

Lien avec le sinus et le cosinus dans un triangle rectangle : Dans un triangle rectangle, pour un angle aigu α :

- $\cos(\alpha) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$
- $\sin(\alpha) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$

Propriété

Valeurs remarquables :

x (radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Propriété

Fonctions cosinus et sinus :

- La fonction cosinus est la fonction $x \mapsto \cos(x)$.
- La fonction sinus est la fonction $x \mapsto \sin(x)$.
- **Parité** : La fonction cosinus est paire ($\cos(-x) = \cos(x)$). La fonction sinus est impaire ($\sin(-x) = -\sin(x)$).
- **Périodicité** : Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π . Pour tout réel x et tout entier relatif k : $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$

Point de méthode

Placer un point sur le cercle trigonométrique et lier la représentation graphique des fonctions cosinus et sinus et le cercle trigonométrique :

1. Pour placer un point M associé à un réel x sur le cercle trigonométrique, partez de $(1, 0)$ et parcourez une distance x sur le cercle dans le sens direct (si $x > 0$) ou indirect (si $x < 0$).
2. Les coordonnées de ce point M sont $(\cos(x), \sin(x))$.
3. Pour la représentation graphique, l'axe des abscisses représente les valeurs du réel x et l'axe des ordonnées les valeurs de $\cos(x)$ ou $\sin(x)$. La périodicité de 2π se traduit par un motif qui se répète tous les 2π sur l'axe des abscisses.

Point de méthode

Traduire graphiquement la parité et la périodicité des fonctions trigonométriques :

- **Parité (cosinus) :** La courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- **Imparité (sinus) :** La courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- **Périodicité (2π) :** Les courbes de cosinus et sinus sont formées par la répétition d'un motif sur un intervalle de longueur 2π .

Point de méthode

Par lecture du cercle trigonométrique, déterminer, pour des valeurs remarquables de x , les cosinus et sinus d'angles associés à x :

1. Placez la valeur remarquable de x (par exemple $\frac{\pi}{3}$) sur le cercle. Lisez ses coordonnées.
2. Pour un angle associé comme $\pi - x$, $\pi + x$, $2\pi - x$, $-x$, etc., placez le point correspondant sur le cercle par symétrie.
3. Lisez les nouvelles coordonnées pour déterminer les cosinus et sinus associés.

Exemple : Cosinus et sinus de $\frac{2\pi}{3}$.

On sait que $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$. Le point sur le cercle trigonométrique associé à $\frac{2\pi}{3}$ est le symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du point associé à $\frac{\pi}{3}$. $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$. $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

0.6.1 Démonstrations

- **Calcul de $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$:**
 - **Pour $\frac{\pi}{4}$:** Considérons le carré de côté 1. La diagonale mesure $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Dans un triangle rectangle isocèle (angles $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$), si l'hypoténuse est 1, les côtés de l'angle droit sont $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Sur le cercle trigonométrique, le point $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ a pour coordonnées (x_M, y_M) avec $x_M = y_M$. Puisque $x_M^2 + y_M^2 = 1$, on a $2x_M^2 = 1$, donc $x_M = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 - **Pour $\frac{\pi}{3}$:** Considérons un triangle équilatéral de côté 1. Les angles sont $\frac{\pi}{3}$. La

hauteur est $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Sur le cercle trigonométrique, le point $M(\frac{\pi}{3})$ a pour abscisse $\frac{1}{2}$ (en projetant le sommet supérieur sur l'axe des abscisses et en considérant que le point est à 1 de l'origine sur l'axe des abscisses). Son ordonnée est $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ et $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

0.6.2 Exemple d'algorithme

Point de méthode

Approximation de π par la méthode d'Archimède.

La méthode d'Archimède consiste à encadrer un cercle par des polygones réguliers inscrits et circonscrits. Le périmètre du cercle est alors encadré par les périmètres de ces polygones. Plus le nombre de côtés du polygone est grand, plus l'approximation est précise.

Pour un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon R : Chaque côté est une corde de longueur $2R\sin(\frac{\pi}{n})$. Le périmètre du polygone inscrit est $P_{\text{inscrit}} = n \times 2R\sin(\frac{\pi}{n})$. Comme le cercle a un périmètre $2\pi R$, on a $\pi \approx n\sin(\frac{\pi}{n})$.

```
import math

def archimedes_pi(n):
    # Pour un cercle de rayon 1, le demi-périmètre est pi.
    # Périmètre du polygone inscrit: n * 2 * sin(pi/n)
    # Périmètre du polygone circonscrit: n * 2 * tan(pi/n)

    # Nous allons nous concentrer sur l'approximation à partir du polygone inscrit
    # L'approximation de pi est (n * sin(pi/n))
    return n * math.sin(math.pi / n)

# print(archimedes_pi(6)) # Hexagone inscrit
# print(archimedes_pi(100)) # Polygone à 100 côtés
# print(archimedes_pi(10000)) # Polygone à 10000 côtés
```