

Exercices de Réflexion - Analyse

Problèmes d'Analyse et de Modélisation

Ces exercices sont conçus pour développer votre autonomie, votre capacité à raisonner et à mobiliser plusieurs notions simultanément. Il est attendu une démarche claire et argumentée.

Dérivation et Propriétés des Fonctions

Problème 1.1 : Optimisation d'un cylindre dans une sphère On considère une sphère de rayon R (constant). On souhaite inscrire dans cette sphère un cylindre de révolution de volume maximal.

- Faites un schéma de la situation. Nommez r le rayon de la base du cylindre et h sa hauteur.
- Exprimez h en fonction de r et R . Quel est l'ensemble de définition de r ?
- Exprimez le volume $V(r)$ du cylindre en fonction de r et R .
- Déterminez la valeur de r qui maximise le volume du cylindre.
- Calculez le volume maximal de ce cylindre en fonction de R . Comparez-le au volume de la sphère.

Problème 1.2 : Une inégalité fondamentale L'objectif de cet exercice est de démontrer que pour tout nombre réel $x \geq 0$, l'inégalité suivante est vraie : $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2})$. Calculez $f'(x)$.
- Étudiez le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$. Pour cela, vous pourrez être amené à étudier la dérivée de $f'(x)$.
- Dressez le tableau de variations de f .
- Déduisez-en la valeur minimale de $f(x)$ et concluez quant à l'inégalité.

Problème 1.3 : Propriété géométrique des tangentes à l'hyperbole Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{k}{x}$ où k est une constante réelle non nulle. Sa courbe représentative est une hyperbole. On considère un point M de la courbe d'abscisse $a \neq 0$.

- Déterminez l'équation de la tangente (T) à la courbe de f au point M .
- Calculez les coordonnées des points d'intersection de cette tangente (T) avec l'axe des abscisses (noté A) et avec l'axe des ordonnées (noté B).
- Déterminez l'aire du triangle OAB , où O est l'origine du repère. Que constatez-vous ? (Justifiez votre réponse).
- Discutez l'impact de la valeur de k sur cette propriété.

Problème 1.4 : Étude d'une fonction et position relative Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. Et soit (D) la droite d'équation $y = x - 1$.

- Calculez la dérivée $f'(x)$.

- b) Étudiez le signe de $f'(x)$ et déduisez-en les variations de f . Que remarquez-vous concernant le sens de variation ?
- c) Montrez que $f(x) = (x - 1)^3$.
- d) Déterminez l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1. Que pouvez-vous en déduire sur la position de la courbe par rapport à cette tangente ?
- e) Étudiez la position relative de la courbe représentative de f et de la droite (D) .

Modélisation et Fonctions Exponentielles

Problème 2.1 : Croissance d'une colonie de bactéries Dans une expérience, la population $N(t)$ d'une colonie de bactéries est modélisée par $N(t) = N_0 e^{kt}$, où t est le temps en heures et N_0 et k sont des constantes. On sait qu'à l'instant initial ($t = 0$), la population est de 500 bactéries. Après 3 heures, la population a atteint 1500 bactéries.

- a) Déterminez les valeurs de N_0 et de k . Donnez la valeur exacte de k puis une valeur arrondie à 10^{-3} .
- b) Quelle sera la population après 6 heures ? (Arrondir à l'unité).
- c) Déterminez le temps nécessaire pour que la population atteigne 5000 bactéries. (Arrondir à l'heure la plus proche).
- d) La capacité maximale du milieu est de 10 000 bactéries. Le modèle utilisé est-il pertinent à long terme ? Justifiez votre réponse.

Problème 2.2 : Phénomène de refroidissement La température $T(t)$ d'un corps, en degrés Celsius, plongé dans un environnement à température constante de 20°C , est donnée par la loi de Newton : $T(t) = 20 + Ae^{-kt}$, où t est le temps en minutes et A, k sont des constantes positives. À l'instant initial ($t = 0$), la température du corps est de 100°C . Après 10 minutes, sa température est de 60°C .

- a) Déterminez les valeurs de A et de k . Donnez la valeur exacte de k puis une valeur arrondie à 10^{-3} .
- b) Calculez la température du corps après 30 minutes. (Arrondir au dixième de degré).
- c) Au bout de combien de temps la température du corps sera-t-elle inférieure à 25°C ? (Arrondir à la minute).
- d) Que se passe-t-il pour la température du corps lorsque t tend vers l'infini ? Interprétez ce résultat.

Géométrie et Fonctions Trigonométriques

Problème 3.1 : Aire d'un triangle dans le cercle trigonométrique Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle trigonométrique. Soit M un point du cercle associé à un angle $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$. On note H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses.

- a) Faites un schéma clair de la situation.
- b) Exprimez les coordonnées de M et H en fonction de x .
- c) Calculez l'aire du triangle OMH en fonction de x . On notera cette aire $\mathcal{A}(x)$.
- d) Étudiez les variations de la fonction $\mathcal{A}(x)$ sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$.

- e) Pour quelle valeur de x l'aire $\mathcal{A}(x)$ est-elle maximale? Quelle est cette aire maximale?
- f) Pour quelle valeur de x l'aire $\mathcal{A}(x)$ est-elle minimale? Quelle est cette aire minimale?

Problème 3.2 : Étude d'une fonction périodique Soit la fonction f définie par $f(x) = \cos(2x) + \sin(x)$.

- a) Démontrez que f est une fonction 2π -périodique.
- b) Déterminez la parité de f . (Est-elle paire, impaire ou ni l'un ni l'autre?)
- c) Justifiez que l'on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $[0, \pi]$.
- d) On donne la formule : $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$. Démontrez cette formule si vous le pouvez, ou utilisez-la pour la suite.
- e) En utilisant la formule précédente, exprimez $f(x)$ uniquement en fonction de $\sin(x)$.
- f) Posez $u = \sin(x)$. Sur l'intervalle $[0, \pi]$, quelles sont les valeurs possibles de u ?
- g) Soit $g(u) = -2u^2 + u + 1$. Étudiez les variations de g sur l'intervalle des valeurs possibles de u .
- h) Déduisez-en les variations de f sur $[0, \pi]$ et dressez son tableau de variations.