

Exercices d'application - Analyse

1 Taux de variation et nombre dérivé

Calcul du taux de variation

Exercice 1.1 : Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x + 3$.

- a) Calculez le taux de variation de f entre $x = 1$ et $x = 1 + h$.
- b) Que pouvez-vous en déduire pour la fonction f ?

Exercice 1.2 : Soit la fonction g définie par $g(x) = x^2 - x$.

- a) Calculez le taux de variation de g entre $x = 2$ et $x = 2 + h$. Simplifiez l'expression obtenue.
- b) Déduisez-en le nombre dérivé de g en $x = 2$.

Exercice 1.3 : Soit la fonction h définie par $h(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$.

- a) Calculez le taux de variation de h entre $x = 3$ et $x = 3 + h$. Donnez le résultat sous forme d'une fraction simplifiée.
- b) Déduisez-en le nombre dérivé de h en $x = 3$.

Exercice 1.4 : Soit la fonction k définie par $k(x) = \sqrt{x}$ pour $x \geq 0$.

- a) Calculez le taux de variation de k entre $x = 4$ et $x = 4 + h$. (Indice : multipliez par l'expression conjuguée).
- b) Déduisez-en le nombre dérivé de k en $x = 4$.

Équation de la tangente

Exercice 1.5 : Soit f une fonction dérivable en $x = 1$ telle que $f(1) = 5$ et $f'(1) = -2$. Donnez l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

Exercice 1.6 : Soit $f(x) = x^3$.

- a) Calculez le nombre dérivé de f en $x = -1$.
- b) Déterminez l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1 .

Exercice 1.7 : Soit $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

- a) Calculez $f(0)$ et $f'(0)$ (en utilisant la définition du nombre dérivé ou les règles de dérivation vues en cours).
- b) Donnez l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

Interprétation graphique et contextuelle

Exercice 1.8 : La courbe ci-contre représente une fonction f . (Imaginez une courbe avec une tangente tracée en un point A).

- a) Estimez graphiquement le nombre dérivé de f au point d'abscisse 2 si la tangente en ce point passe par $(2, 1)$ et $(4, 5)$.
- b) Interprétez ce nombre dérivé en termes de pente.

Exercice 1.9 : Une voiture roule et sa position $d(t)$ (en km) à l'instant t (en heures) est donnée par $d(t) = 50t^2$.

- a) Calculez la vitesse moyenne de la voiture entre $t = 1$ h et $t = 1.5$ h.
- b) Calculez la vitesse instantanée de la voiture à $t = 1$ h (le nombre dérivé de d en 1).

2 Fonction dérivée et opérations

Dérivées des fonctions usuelles

Exercice 2.1 : Déterminez la fonction dérivée f' de chacune des fonctions suivantes :

- a) $f(x) = 7$
- b) $f(x) = x$
- c) $f(x) = x^5$
- d) $f(x) = x^{-2}$
- e) $f(x) = \sqrt{x}$

Opérations sur les dérivées

Exercice 2.2 : Déterminez la fonction dérivée f' de chacune des fonctions suivantes :

- a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$
- b) $f(x) = -5x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 10$
- c) $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$
- d) $f(x) = x^4 - \sqrt{x}$

Exercice 2.3 : Déterminez la fonction dérivée f' de chacune des fonctions suivantes :

- a) $f(x) = (2x + 1)(x - 3)$
- b) $f(x) = x^2(3x + 4)$
- c) $f(x) = (x^2 + 2)(x^3 - 1)$

Exercice 2.4 : Déterminez la fonction dérivée f' de chacune des fonctions suivantes :

- a) $f(x) = \frac{1}{3x+2}$
- b) $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$
- c) $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$
- d) $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$

Exercice 2.5 : Soit la fonction f définie par $f(x) = (5x - 2)^3$.

- a) Identifiez la forme de $f(x)$ et la règle de dérivation à appliquer.

b) Calculez $f'(x)$.

Exercice 2.6 : Calculez la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+1}$

b) $f(x) = (x^3 - 2x + 5)^2$

c) $f(x) = x\sqrt{x}$ (pensez à x^n)

3 Applications de la dérivation à l'étude des fonctions

Tableaux de variations et extremums

Exercice 3.1 : Soit $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

a) Calculez $f'(x)$.

b) Étudiez le signe de $f'(x)$.

c) Dressez le tableau de variations de f . Indiquez les extremums s'il y en a.

Exercice 3.2 : Soit $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$.

a) Déterminez la dérivée $f'(x)$.

b) Factorisez $f'(x)$ et étudiez son signe.

c) Construisez le tableau de variations de f .

d) Précisez les extremums locaux de f et leurs valeurs.

Exercice 3.3 : Soit $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

a) Précisez l'ensemble de définition de f .

b) Calculez $f'(x)$.

c) Déterminez le signe de $f'(x)$ et les variations de f .

Exercice 3.4 : Soit $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

a) Calculez $f'(x)$.

b) Factorisez $f'(x)$.

c) Étudiez le signe de $f'(x)$ et déduisez-en les variations de f .

d) Déterminez les extremums locaux de f .

Problèmes d'optimisation

Exercice 3.5 : Un jardinier veut clôturer une parcelle rectangulaire de 200 m de périmètre. Quelles dimensions doit avoir cette parcelle pour que sa surface soit maximale ?

Exercice 3.6 : On dispose d'une feuille de carton carrée de côté 10 cm. On veut fabriquer une boîte sans couvercle en découpant des carrés de côté x aux quatre coins de la feuille et en repliant les bords.

a) Faites un schéma de la feuille de carton et de la boîte.

b) Quel est l'ensemble des valeurs possibles pour x ?

c) Exprimez le volume de la boîte $V(x)$ en fonction de x .

d) Déterminez la valeur de x qui maximise le volume de la boîte.

e) Calculez le volume maximal.

Exercice 3.7 : Une entreprise fabrique x objets par jour. Le coût de production (en euros) est donné par $C(x) = x^2 - 60x + 1000$ pour $x \in [0, 50]$. Chaque objet est vendu 10 euros.

- a) Exprimez la recette $R(x)$ en fonction de x .
- b) Exprimez le bénéfice $B(x)$ en fonction de x .
- c) Déterminez le nombre d'objets à produire pour que le bénéfice soit maximal.
- d) Quel est le bénéfice maximal ?

Inégalités et positions relatives de courbes

Exercice 3.8 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

- a) Étudiez les variations de f .
- b) Dédisez-en que pour tout réel x , $f(x) > 0$.

Exercice 3.9 : Soient deux fonctions $f(x) = x^2 + x - 1$ et $g(x) = 3x - 2$.

- a) Étudiez la position relative des courbes représentatives de f et g .
- b) Déterminez les points d'intersection des deux courbes.

4 Fonction exponentielle

Propriétés algébriques

Exercice 4.1 : Simplifiez les expressions suivantes :

- a) $e^3 \times e^5$
- b) $\frac{e^7}{e^2}$
- c) $(e^x)^4$
- d) $e^{2x} \times e^{-x+1}$
- e) $\frac{e^{x+2}}{e^{x-1}}$
- f) $e^x \times e^{-x}$

Exercice 4.2 : Écrivez les expressions suivantes sous la forme e^A :

- a) $\frac{1}{e^{3x}}$
- b) $e^{x^2} e^{-x} e^2$
- c) $(e^{2x+1})^3 e^{-5x}$

Équations et inéquations avec l'exponentielle

Exercice 4.3 : Résolvez les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

- a) $e^x = e^5$
- b) $e^{2x-1} = 1$
- c) $e^{x^2} = e^{3x-2}$
- d) $(e^x)^2 - e^x - 2 = 0$ (poser $X = e^x$)

Exercice 4.4 : Résolvez les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

- a) $e^x > e^2$
- b) $e^{x-3} \leq 1$
- c) $e^{x^2+x} > e^0$
- d) $\frac{e^x}{e^{2x+1}} \geq e^{-x}$

Étude de fonctions avec l'exponentielle

Exercice 4.5 : Soit $f(x) = e^x - x$.

- a) Calculez $f'(x)$.
- b) Étudiez le signe de $f'(x)$ (vous pouvez vous aider de la valeur de x pour laquelle $e^x = 1$).
- c) Dressez le tableau de variations de f .
- d) Déduisez-en que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$.

Exercice 4.6 : Soit $f(x) = (x - 1)e^x$.

- a) Calculez $f'(x)$.
- b) Étudiez le signe de $f'(x)$.
- c) Dressez le tableau de variations de f .

Modélisation

Exercice 4.7 : La population d'une colonie de bactéries est modélisée par la fonction $P(t) = 100 \times e^{0.1t}$, où t est le temps en heures et $P(t)$ est le nombre de bactéries.

- a) Quelle est la population initiale de bactéries ?
- b) Calculez la population après 5 heures.
- c) Au bout de combien d'heures la population aura-t-elle doublé par rapport à la population initiale ? (On donnera une valeur approchée à l'unité près).

Exercice 4.8 : Le prix d'un article, en euros, diminue avec le temps t (en années) selon la formule $P(t) = 200e^{-0.2t}$.

- a) Quel est le prix initial de l'article ?
- b) Quel sera le prix de l'article après 3 ans ? (Arrondir au centime d'euro).
- c) Au bout de combien d'années le prix de l'article sera-t-il inférieur à 50 euros ? (Arrondir à l'unité près).

5 Fonctions trigonométriques (Cercle et Propriétés)

Cercle trigonométrique et angles remarquables

Exercice 5.1 : Pour chacun des angles suivants, placez le point correspondant sur le cercle trigonométrique et donnez ses coordonnées $(\cos x, \sin x)$:

- a) $\frac{\pi}{2}$
- b) π
- c) $\frac{3\pi}{2}$

- d) 2π
- e) 0

Exercice 5.2 : Complétez le tableau suivant avec les valeurs exactes :

x (radians)	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\cos(x)$			
$\sin(x)$			

Angles associés et propriétés

Exercice 5.3 : Utilisez le cercle trigonométrique et les propriétés de symétrie pour donner les valeurs exactes des cosinus et sinus des angles suivants :

- a) $\frac{5\pi}{6}$
- b) $-\frac{\pi}{4}$
- c) $\frac{4\pi}{3}$
- d) $\frac{7\pi}{6}$
- e) $2\pi - \frac{\pi}{3}$

Exercice 5.4 : Donnez la valeur exacte de :

- a) $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$
- b) $\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$
- c) $\cos\left(\frac{9\pi}{2}\right)$

Exercice 5.5 : Sachant que $\sin(x) = \frac{3}{5}$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, déterminez la valeur exacte de $\cos(x)$.

Exercice 5.6 : Sachant que $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, déterminez la valeur exacte de $\sin(x)$.

Exercice 5.7 : Simplifiez les expressions suivantes :

- a) $A = \cos(\pi - x) + \sin(\pi + x)$
- b) $B = \cos(-x) + \sin(x)$
- c) $C = \cos(x + 2\pi) + \sin(x - 2\pi)$
- d) $D = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (Indice : utilisez le cercle trigonométrique pour trouver les relations)

Équations trigonométriques simples

Exercice 5.8 : Résolvez les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

- a) $\cos(x) = \frac{1}{2}$
- b) $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- c) $\cos(x) = -1$
- d) $\sin(x) = 0$

Exercice 5.9 : Résolvez les équations suivantes dans l'intervalle $[0, 2\pi[$:

- a) $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- b) $\sin(x) = \frac{1}{2}$
- c) $\cos(x) = -\frac{1}{2}$
- d) $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$