

Polycopié de Mathématiques - Première Générale

Chapitre : Algèbre

Juin 2025

1 Introduction à l'Algèbre en Première Générale

L'algèbre en classe de première générale vise à consolider les acquis de seconde et à introduire de nouvelles notions essentielles pour la poursuite d'études. Cette partie du programme se concentre sur les suites numériques, les fonctions polynômes du second degré, et leur application à la modélisation de phénomènes discrets. L'objectif est de développer le goût des mathématiques chez l'élève, de lui faire apprécier l'efficacité des concepts mathématiques et la généralisation que permet la maîtrise de l'abstraction.

2 Suites Numériques

Les suites numériques sont présentées d'un point de vue principalement algébrique, modélisant des systèmes discrets. Elles permettent d'aborder le concept de définition par récurrence.

2.1 Modes de génération d'une suite

Définition

Une suite numérique est une liste ordonnée de nombres. Ses termes peuvent être notés $u(n)$ ou u_n .

Les suites peuvent être définies de plusieurs manières :

- Par une formule explicite : $u_n = f(n)$. Dans ce cas, chaque terme est directement calculable en fonction de son rang n .
- Par une relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$. Chaque terme est défini à partir du (ou des) précédent(s). Un premier terme (ou plusieurs) est nécessaire.
- Par des motifs géométriques ou combinatoires : Par exemple, une suite de nombres figurés ou une suite décrivant le nombre d'éléments dans une configuration dépendant d'un entier naturel.
- Par un algorithme.

Point de méthode

Calculer des termes d'une suite

1. Si la suite est définie explicitement, substituez la valeur de n dans la formule.
2. Si la suite est définie par récurrence, calculez les termes successivement à partir du (ou des) premier(s) terme(s) donné(s).
3. Si la suite est définie par un algorithme, exécutez l'algorithme pas à pas.

2.1.1 Exemples de génération de suites

Exemple 1 : Suite définie explicitement Considérons la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n + 1$. **Calcul des premiers termes :**

- $u_0 = 2(0) + 1 = 1$
- $u_1 = 2(1) + 1 = 3$
- $u_2 = 2(2) + 1 = 5$

Chaque terme est directement obtenu en remplaçant n dans la formule.

Exemple 2 : Suite définie par récurrence Considérons la suite (v_n) définie par $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 3v_n - 1$. **Calcul des premiers termes :**

- $v_0 = 2$ (donné)
- $v_1 = 3v_0 - 1 = 3(2) - 1 = 6 - 1 = 5$
- $v_2 = 3v_1 - 1 = 3(5) - 1 = 15 - 1 = 14$

Pour calculer v_n , il faut connaître v_{n-1} .

2.2 Suites Arithmétiques

Définition

Une suite arithmétique est une suite de nombres où la différence entre deux termes consécutifs est constante. Cette constante est appelée la raison de la suite, notée r . Ainsi, pour une suite arithmétique (u_n) , on a $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout n .

Propriété

Terme général d'une suite arithmétique

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 , alors pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 + n \cdot r$$

Si le premier terme est u_p , alors $u_n = u_p + (n - p) \cdot r$.

Démonstration (du terme général $u_n = u_0 + n \cdot r$) : Par définition, $u_{n+1} = u_n + r$.

$$u_1 = u_0 + r$$

$$u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r$$

$$u_3 = u_2 + r = (u_0 + 2r) + r = u_0 + 3r$$

Par une récurrence simple, on peut conjecturer que $u_n = u_0 + n \cdot r$. Supposons que $u_k = u_0 + k \cdot r$ pour un certain $k \geq 0$. Alors $u_{k+1} = u_k + r = (u_0 + k \cdot r) + r = u_0 + (k + 1)r$. La propriété est donc vraie pour $k + 1$. Comme elle est vraie pour $n = 0$ ($u_0 = u_0 + 0 \cdot r$), elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

PropriétéSomme des n premiers entiers

La somme des n premiers entiers naturels (à partir de 1) est donnée par la formule :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration (de $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$) : Soit $S_n = 1 + 2 + \dots + (n - 1) + n$. On peut écrire S_n dans l'ordre croissant et dans l'ordre décroissant : $S_n = 1 + 2 + \dots + (n - 1) + n$ $S_n = n + (n - 1) + \dots + 2 + 1$ En additionnant terme à terme ces deux lignes, on obtient n fois la somme $(n + 1)$: $2S_n = (1 + n) + (2 + n - 1) + \dots + (n - 1 + 2) + (n + 1)$ $2S_n = (n + 1) + (n + 1) + \dots + (n + 1) + (n + 1)$ (n termes) $2S_n = n(n + 1)$ Donc, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Propriété

Sens de variation d'une suite arithmétique

Le sens de variation d'une suite arithmétique (u_n) est donné par sa raison r :

- Si $r > 0$, la suite est croissante.
- Si $r < 0$, la suite est décroissante.
- Si $r = 0$, la suite est constante.

Remarque

Lien avec les fonctions affines

Une suite arithmétique peut être vue comme la restriction à $\mathbb{N}$ d'une fonction affine $f(x) = rx + u_0$. Cela signifie que les points (n, u_n) sont alignés sur une droite de pente r .

Point de méthode

Modéliser un phénomène discret à croissance linéaire

Un phénomène qui augmente ou diminue d'une quantité fixe à chaque étape peut être modélisé par une suite arithmétique. **Exemple** : Chaque année, le nombre d'abonnés à un service de streaming augmente de 5000. Si en 2020 il y avait 100 000 abonnés, le nombre d'abonnés A_n en l'année 2020 + n peut être modélisé par une suite arithmétique de premier terme $A_0 = 100\,000$ et de raison $r = 5\,000$.

2.3 Suites Géométriques

Définition

Une suite géométrique est une suite de nombres où le rapport entre deux termes consécutifs est constant. Cette constante est appelée la raison de la suite, notée q . Ainsi, pour une suite géométrique (u_n) , on a $u_{n+1} = u_n \cdot q$ pour tout n .

Propriété

Terme général d'une suite géométrique

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 , alors pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 \cdot q^n$$

Si le premier terme est u_p , alors $u_n = u_p \cdot q^{n-p}$.

Démonstration (du terme général $u_n = u_0 \cdot q^n$) : Par définition, $u_{n+1} = u_n \cdot q$.

$$u_1 = u_0 \cdot q$$

$$u_2 = u_1 \cdot q = (u_0 \cdot q) \cdot q = u_0 \cdot q^2$$

$$u_3 = u_2 \cdot q = (u_0 \cdot q^2) \cdot q = u_0 \cdot q^3$$

Par une récurrence simple, on peut conjecturer que $u_n = u_0 \cdot q^n$. Supposons que $u_k = u_0 \cdot q^k$ pour un certain $k \geq 0$. Alors $u_{k+1} = u_k \cdot q = (u_0 \cdot q^k) \cdot q = u_0 \cdot q^{k+1}$. La propriété est donc vraie pour $k+1$. Comme elle est vraie pour $n=0$ ($u_0 = u_0 \cdot q^0 = u_0$), elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Propriété

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Pour $q \neq 1$, la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique $(u_0, u_1, \dots, u_n)$ est donnée par :

$$S_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

En particulier, $1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Démonstration (de $1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$) : Soit $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$. Multiplions S par q : $qS = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1}$. Maintenant, soustrayons qS de S : $S - qS = (1 + q + \dots + q^n) - (q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1})$. $S(1 - q) = 1 - q^{n+1}$. Si $q \neq 1$, on peut diviser par $(1 - q)$: $S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Propriété

Sens de variation d'une suite géométrique

Le sens de variation d'une suite géométrique (u_n) avec $u_0 > 0$:

- Si $q > 1$, la suite est croissante.
- Si $0 < q < 1$, la suite est décroissante.
- Si $q = 1$, la suite est constante.
- Si $q < 0$, la suite n'est pas monotone (ses termes alternent de signe).

Remarque

Lien avec la fonction exponentielle

Une évolution à taux fixe est modélisée par une suite géométrique. Il est intéressant de noter le lien avec la fonction exponentielle qui modélise des évolutions continues à taux constant.

Point de méthode

Modéliser un phénomène discret à croissance exponentielle

Un phénomène qui augmente ou diminue d'un pourcentage fixe à chaque étape peut être modélisé par une suite géométrique. **Exemple** : Un capital de 1000 € est placé à un taux d'intérêt annuel de 2%. Le capital C_n après n années peut être modélisé par une suite géométrique de premier terme $C_0 = 1000$ et de raison $q = 1 + 0.02 = 1.02$.

2.4 Notion intuitive de limite

Bien qu'aucune formalisation ne soit attendue, il s'agit de développer une intuition de la notion de limite, finie ou infinie, d'une suite à l'aide de calculs numériques et d'algorithmes de recherche de seuil.

Point de méthode

Conjecturer la limite d'une suite

1. Calculez un grand nombre de termes de la suite.

2. Observez le comportement des termes à mesure que n augmente. S'ils s'approchent d'une valeur fixe, on peut conjecturer une limite finie. S'ils deviennent de plus en plus grands (en positif ou en négatif), on peut conjecturer une limite infinie.
3. Utilisez un outil logiciel (calculatrice, tableur, Python) pour automatiser le calcul et la visualisation des termes.

Exemple : Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n+1}$.

- $u_0 = 1$
- $u_1 = \frac{1}{2} = 0.5$
- $u_{10} = \frac{1}{11} \approx 0.09$
- $u_{100} = \frac{1}{101} \approx 0.0099$
- $u_{1000} = \frac{1}{1001} \approx 0.00099$

On observe que les termes de la suite se rapprochent de 0 lorsque n devient très grand. On peut conjecturer que la limite de cette suite est 0.

3 Fonctions Polynômes du Second Degré

L'étude des fonctions polynômes du second degré réactive les connaissances de seconde et permet de les consolider, notamment sur la fonction carré et les identités remarquables. Il est important de varier les registres (algébrique, graphique) et de mettre en valeur les interactions avec le reste du programme.

Définition

Une fonction polynôme du second degré est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b, c sont des nombres réels et $a \neq 0$.

La courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré est une parabole.

3.1 Formes d'une fonction polynôme du second degré

Une fonction polynôme du second degré peut se présenter sous différentes formes :

- **Forme développée réduite** : $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- **Forme canonique** : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.
- **Forme factorisée** : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, si elle admet des racines réelles x_1 et x_2 .

Propriété

Forme canonique

Toute fonction polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) peut s'écrire sous la forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha) = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$. Le calcul de la forme canonique dans le cas général n'est pas un attendu du programme, mais les élèves doivent être capables de la déterminer dans des cas simples à l'aide de l'identité $x^2 + 2ax = (x + a)^2 - a^2$ (méthode de complétion du carré).

Point de méthode

Déterminer la forme canonique par complétion du carré

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1. Factoriser a sur les deux premiers termes : $f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$.
2. Utiliser l'identité remarquable $X^2 + 2XY = (X + Y)^2 - Y^2$ avec $X = x$ et $2Y = \frac{b}{a}$, donc $Y = \frac{b}{2a}$.

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$$
3. Développer et simplifier : $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\frac{b^2}{4a^2} + c$ $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$ $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$

Ceci donne $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Exemple : Mettre $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$ sous forme canonique.

$$\begin{aligned}f(x) &= 2(x^2 - 6x) + 10 \\&= 2((x - 3)^2 - 3^2) + 10 \\&= 2(x - 3)^2 - 2 \cdot 9 + 10 \\&= 2(x - 3)^2 - 18 + 10 \\&= 2(x - 3)^2 - 8\end{aligned}$$

Donc, la forme canonique est $2(x - 3)^2 - 8$.

3.2 Racines, discriminant et factorisation

Définition

Les racines d'une fonction polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ sont les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$. On parle aussi de solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Définition

Le discriminant, noté Δ (delta), d'une fonction polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ est défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

Propriété

Résolution de l'équation du second degré et factorisation

La nature et le nombre de racines réelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dépendent du signe du discriminant Δ :

— Si $\Delta > 0$: L'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

La forme factorisée est $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

— Si $\Delta = 0$: L'équation admet une unique racine réelle (dite double) :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

La forme factorisée est $f(x) = a(x - x_0)^2$.

— Si $\Delta < 0$: L'équation n'admet aucune racine réelle. La fonction polynôme ne peut pas être factorisée en facteurs du premier degré à coefficients réels.

Démonstration (de la résolution de l'équation du second degré) : Partons de la forme canonique : $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = 0$. En multipliant par $4a$ (puisque $a \neq 0$) : $4a^2\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + (4ac - b^2) = 0$. $4a^2\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = b^2 - 4ac$. Soit $Y = x + \frac{b}{2a}$. L'équation devient $4a^2Y^2 = \Delta$. $Y^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$.

— Si $\Delta > 0$: $Y = \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$. Donc $x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ (le signe de $2a$ est absorbé par le $\pm$).

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

— Si $\Delta = 0$: $Y^2 = 0 \Rightarrow Y = 0$. Donc $x + \frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$.

— Si $\Delta < 0$: $Y^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ est un nombre négatif, ce qui est impossible pour un nombre réel Y . Donc pas de solution réelle.

Propriété

Somme et produit des racines

Si une fonction polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2 (distinctes ou confondues), alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Ces propriétés sont utiles pour détecter des racines entières par calcul mental.

Point de méthode

Factoriser une fonction polynôme du second degré

1. **Racine évidente** : Si $x = 1$ ou $x = -1$ (ou autre valeur simple) est une racine, alors on peut factoriser par $(x - 1)$ ou $(x + 1)$.
2. **Somme et produit des racines** : Si vous pouvez trouver deux nombres dont la somme est $-b/a$ et le produit est c/a , ce sont les racines.
3. **Identité remarquable** : Si la forme est de type $a(x - x_0)^2$ (par exemple $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$).
4. **Formules générales** : Calculer le discriminant Δ et utiliser les formules des racines.

Exemple : Factoriser $f(x) = x^2 - 5x + 6$. **Méthode 1 : Somme et produit** On cherche deux nombres dont la somme est 5 et le produit est 6. On trouve 2 et 3. Donc $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$. La forme factorisée est $f(x) = (x - 2)(x - 3)$.

Méthode 2 : Discriminant $a = 1, b = -5, c = 6$. $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1$. Puisque $\Delta > 0$, il y a deux racines réelles : $x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$. $x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$. La forme factorisée est $f(x) = 1 \cdot (x - 2)(x - 3) = (x - 2)(x - 3)$.

3.3 Signe d'une fonction polynôme du second degré

Propriété

Signe d'une fonction polynôme du second degré

Le signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$ dépend du signe de a et du discriminant Δ :

- Si $\Delta < 0$: $f(x)$ a le même signe que a pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$: $f(x)$ a le même signe que a pour tout $x \in \mathbb{R}$, sauf en $x_0 = -b/(2a)$ où $f(x_0) = 0$.
- Si $\Delta > 0$: $f(x)$ a le signe de $-a$ entre les racines x_1 et x_2 (avec $x_1 < x_2$), et le signe de a à l'extérieur des racines.

Point de méthode

Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré

1. Calculer le discriminant Δ .
2. Déterminer les racines (s'il y en a).
3. Utiliser le tableau de signes en fonction de la valeur de a .

Exemple : Étudier le signe de $f(x) = -x^2 + x + 2$. $a = -1, b = 1, c = 2$. $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(-1)(2) = 1 + 8 = 9$. $\Delta > 0$, il y a deux racines : $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2(-1)} = \frac{-1-3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$. $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2(-1)} = \frac{-1+3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$. Le coefficient $a = -1$ est négatif. Donc $f(x)$ est positive entre les racines et négative à l'extérieur.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f(x) = -x^2 + x + 2$	$-$	0	$+$	0	$-$

3.4 Variations et extremum d'une fonction polynôme du second degré

La forme canonique est particulièrement utile pour étudier les variations et l'extremum d'une fonction polynôme du second degré.

Propriété

Variations et extremum

Pour une fonction polynôme du second degré $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$:

- Si $a > 0$: la parabole est ouverte vers le haut. La fonction est décroissante sur $(-\infty, \alpha]$ et croissante sur $[\alpha, +\infty)$. Elle admet un minimum en $x = \alpha$, dont la valeur est $f(\alpha) = \beta$.
- Si $a < 0$: la parabole est ouverte vers le bas. La fonction est croissante sur $(-\infty, \alpha]$ et décroissante sur $[\alpha, +\infty)$. Elle admet un maximum en $x = \alpha$, dont la valeur est $f(\alpha) = \beta$.

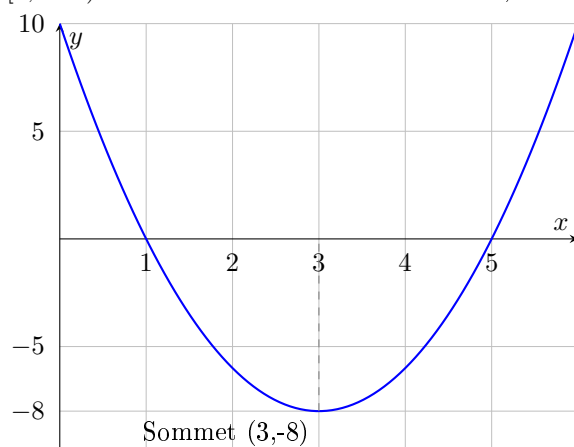
Le point (α, β) est le sommet de la parabole et son axe de symétrie est la droite verticale d'équation $x = \alpha = -b/(2a)$.

Point de méthode

Étudier les variations et déterminer l'extremum

1. Déterminer le coefficient a .
2. Calculer l'abscisse du sommet $\alpha = -b/(2a)$.
3. Calculer l'ordonnée du sommet $\beta = f(\alpha)$.
4. Dédire les variations de la fonction et l'extremum en fonction du signe de a .

Exemple : Étudier les variations de $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$. Nous avons trouvé la forme canonique : $f(x) = 2(x - 3)^2 - 8$. Ici, $a = 2$, donc $a > 0$. L'abscisse du sommet est $\alpha = 3$, et l'ordonnée est $\beta = -8$. Comme $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut. La fonction f est décroissante sur $(-\infty, 3]$ et croissante sur $[3, +\infty)$. Elle admet un minimum en $x = 3$, de valeur $f(3) = -8$.



4 Vocabulaire Ensembliste et Logique

L'apprentissage des notations mathématiques et de la logique est transversal et fondamental pour tous les chapitres du programme.

4.1 Notions ensemblistes de base

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire.

Définition

Ensemble Un ensemble est une collection d'objets distincts, appelés éléments.

Définition

Appartenance ($\in$) Le symbole $\in$ signifie "appartient à". Par exemple, $x \in A$ signifie que x est un élément de l'ensemble A .

Définition

Inclusion ($\subset$) Le symbole $\subset$ signifie "est inclus dans" ou "est un sous-ensemble de". $A \subset B$ signifie que tout élément de A est aussi un élément de B .

Définition

Intersection ($\cap$) L'intersection de deux ensembles A et B , notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B .

Définition

Réunion ($\cup$) La réunion de deux ensembles A et B , notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B (ou aux deux).

Définition

Complémentaire ($\bar{A}$ ou $E \setminus A$) Le complémentaire d'un sous-ensemble A d'un ensemble E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A . Il peut être noté $\bar{A}$ (en probabilités) ou $E \setminus A$.

Définition

Couple et produit cartésien Un couple (a, b) est une paire ordonnée d'éléments. Le produit cartésien de deux ensembles A et B , noté $A \times B$, est l'ensemble de tous les couples (a, b) où $a \in A$ et $b \in B$.

4.2 Connecteurs logiques et quantificateurs

Les élèves apprennent à lire et écrire des propositions contenant les connecteurs logiques "et", "ou", à formuler des implications et équivalences, et à identifier le statut des égalités et des lettres.

Définition

Proposition Une proposition est une affirmation qui peut être vraie ou fausse.

Définition

Connecteurs logiques

- **ET** ($\wedge$) : La proposition "A et B" est vraie si et seulement si A est vraie et B est vraie.
- **OU** ($\vee$) : La proposition "A ou B" est vraie si et seulement si A est vraie ou B est vraie (ou les deux).

Définition

Implication ($\Rightarrow$) La proposition "A implique B", notée $A \Rightarrow B$, signifie que si A est vraie, alors B est vraie. A est une condition suffisante pour B, et B est une condition nécessaire pour A. La réciproque de $A \Rightarrow B$ est $B \Rightarrow A$.

Définition

Équivalence ($\Leftrightarrow$) La proposition "A est équivalent à B", notée $A \Leftrightarrow B$, signifie que A implique B et B implique A. A est une condition nécessaire et suffisante pour B.

Définition

Quantificateurs (les symboles $\forall$ et $\exists$ ne sont pas exigibles)

- **Pour tout** / **Quel que soit** ($\forall$) : Indique que la proposition est vraie pour chaque élément.
- **Il existe** ($\exists$) : Indique qu'il y a au moins un élément pour lequel la proposition est vraie.

Les élèves doivent repérer les quantifications implicites dans certaines propositions, notamment les propositions conditionnelles.

Point de méthode

Mobiliser un contre-exemple

Pour montrer qu'une proposition est fausse, il suffit de trouver un seul exemple (un contre-exemple) pour lequel la proposition est fausse.

Exemple : Proposition : "Pour tout nombre réel x , $x^2 > x$." Contre-exemple : Si $x = 0.5$, alors $x^2 = 0.25$. Or $0.25 \ngtr 0.5$. La proposition est fausse.

4.3 Types de raisonnements

Les élèves produisent des raisonnements par disjonction des cas, par l'absurde, par contraposée, et en découvrent la structure.

Définition

Raisonnement par disjonction des cas

Il consiste à diviser le problème en plusieurs cas (qui couvrent toutes les possibilités) et à résoudre le problème pour chaque cas séparément.

Définition

Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on suppose que sa négation (non P) est vraie et on montre que cela conduit à une contradiction. Si (non P) mène à une contradiction, alors P doit être vraie.

Définition

Raisonnement par contraposée

Pour démontrer une implication $A \Rightarrow B$, on peut démontrer sa contraposée, qui est $(\text{non } B) \Rightarrow (\text{non } A)$. Ces deux implications sont logiquement équivalentes.

Exemple de raisonnement par contraposée : Proposition à démontrer : "Si n^2 est pair, alors n est pair." La contraposée est : "Si n est impair, alors n^2 est impair." Montrons la contraposée : Si n est impair, il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$. Alors $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Puisque $2k^2 + 2k$ est un entier, n^2 est de la forme $2 \cdot (\text{entier}) + 1$, ce qui signifie que n^2 est impair. La contraposée est vraie, donc la proposition initiale est vraie.