

Recueil d'exercices de réflexion

Classe de Première Générale - Mathématiques

Partie : Algèbre

Ce recueil est conçu pour développer vos compétences en mathématiques en vous proposant des problèmes stimulants qui favorisent l'initiative, la modélisation et l'argumentation. Prenez le temps de la réflexion, n'hésitez pas à expérimenter et à explorer différentes pistes. Chaque exercice est une opportunité d'approfondir votre compréhension et de stabiliser vos connaissances.

Suites numériques, modèles discrets

Problème 1 : La population des lapins de Fibonacci revisitée

Un éleveur de lapins observe l'évolution de sa population. Chaque couple de lapins nouveau-né (un mâle et une femelle) devient productif à l'âge de un mois. À partir de l'âge de deux mois, chaque couple productif donne naissance à un nouveau couple chaque mois. On suppose qu'aucun lapin ne meurt. Au début (mois 0), l'éleveur possède un seul couple de lapins nouveau-nés.

1. Modélisez cette situation en définissant une suite numérique qui représente le nombre de couples de lapins au début de chaque mois. Expliquez clairement votre démarche.
2. Calculez les premiers termes de cette suite. Que remarquez-vous ?
3. L'éleveur souhaite savoir quand il atteindra 100 couples de lapins. Proposez une méthode pour estimer ce moment.
4. Comment cette suite pourrait-elle être affectée si l'on considérait un taux de mortalité fixe pour les lapins âgés de plus de 3 ans ? Décrivez qualitativement l'impact sur le modèle.

Problème 2 : Un investissement pas si simple

Une personne place un capital initial de 1000 € sur un compte rémunéré à un taux d'intérêt annuel de 2%. Les intérêts sont capitalisés à la fin de chaque année. Cependant, chaque année, après la capitalisation des intérêts, la personne retire 50 €.

1. Définissez une suite numérique qui modélise le capital disponible sur le compte au début de chaque année. Précisez si cette suite est arithmétique, géométrique ou d'un autre type. Justifiez votre réponse.
2. Calculez le capital après 1, 2 et 3 ans.
3. La personne a un objectif de capital de 1200 €. Est-ce que cet objectif sera atteint ? Si oui, quand ? Sinon, pourquoi ?
4. Que se passerait-il si le retrait annuel était de 20 € ? De 100 € ? Analysez l'évolution du capital dans ces différents scénarios.
5. Imaginez un algorithme permettant de déterminer au bout de combien d'années le capital passera sous un certain seuil, ou s'il augmentera indéfiniment.

Problème 3 : Progression géométrique sur un damier

Considérez un damier de $N \times N$ cases. Sur la première case, on dépose 1 grain de riz. Sur la deuxième case, 2 grains, sur la troisième, 4 grains, et ainsi de suite, en doublant le nombre de grains sur chaque case successive.

1. Modélisez le nombre de grains de riz sur la n -ième case par une suite numérique.

- Combien de grains de riz y aura-t-il sur la N^2 -ième case ?
- Exprimez la somme totale des grains de riz sur le damier en fonction de N .
- Si $N = 8$ (un damier de 64 cases), calculez le nombre total de grains de riz. Pensez-vous que cela représente une quantité réaliste ? Discutez.
- Proposez une situation où la notion de suite géométrique est utilisée pour modéliser une décroissance.

Équations, fonctions polynômes du second degré

Problème 4 : Optimisation d'une aire

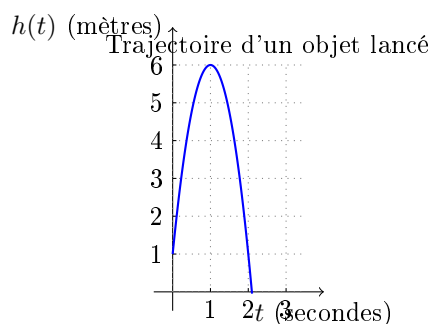
On dispose d'une ficelle de longueur 20 cm. On souhaite former un rectangle avec cette ficelle.

- Modélisez la situation en exprimant l'aire du rectangle en fonction de l'une de ses dimensions.
- Quelle est la nature de la fonction obtenue ? Quelles sont les différentes formes sous lesquelles elle peut être écrite ?
- Déterminez les dimensions du rectangle qui maximisent l'aire. Quelle est cette aire maximale ?
- Imaginez une contrainte supplémentaire, par exemple, une des dimensions doit être supérieure à 3 cm. Comment cela affecte-t-il le problème d'optimisation ?
- Si l'on souhaite que l'aire du rectangle soit de 21 cm², quelles devraient être les dimensions du rectangle ? Existe-t-il toujours une solution ?

Problème 5 : Trajectoire parabolique

Un objet est lancé verticalement vers le haut depuis une hauteur initiale de 1 mètre avec une vitesse initiale de 10 m/s. La hauteur de l'objet (en mètres) en fonction du temps (en secondes) est donnée par la formule $h(t) = -5t^2 + 10t + 1$.

- Quelle est la nature de la fonction $h(t)$? Quel rôle jouent les coefficients de cette fonction dans le contexte physique ?
- À quel moment l'objet atteint-il sa hauteur maximale ? Quelle est cette hauteur maximale ? Expliquez votre raisonnement.
- À quel(s) instant(s) l'objet est-il à une hauteur de 3 mètres ?
- Quand l'objet retombe-t-il au sol ? Justifiez votre réponse.
- Comment la trajectoire et le temps de vol seraient-ils modifiés si la vitesse initiale était différente ? Ou si l'objet était lancé depuis une altitude différente ?
- Dessinez la représentation de la trajectoire sur un repère orthogonal.



Problème 6 : Détection de racines

On considère une fonction polynôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$.

1. Dans quels cas peut-on factoriser directement cette fonction ? Donnez des exemples et expliquez les méthodes associées (racines apparentes, coefficient de x nul, somme et produit des racines).
2. Sans utiliser la formule générale du discriminant, expliquez comment vous pourriez déterminer si un polynôme du second degré donné admet des racines réelles et, le cas échéant, les calculer. Illustrez avec un exemple numérique.
3. Soit $P(x) = x^2 - 7x + 12$. Trouvez ses racines en utilisant la propriété de la somme et du produit des racines.
4. Considérez le polynôme $Q(x) = 2x^2 + kx + 8$. Déterminez les valeurs de k pour lesquelles $Q(x)$ admet exactement une racine réelle.
5. Si on vous donne les deux racines d'un polynôme du second degré, expliquez comment retrouver l'expression de ce polynôme. Est-il unique ?