

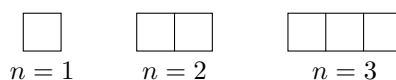
Recueil d'exercices d'application - Première Générale

Mathématiques - Algèbre

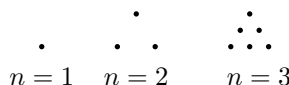
Suites numériques, modèles discrets

Modes de génération d'une suite

- Ex. 1. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n + 3$.
- Calculer les quatre premiers termes de la suite.
 - Représenter graphiquement les cinq premiers points de la suite dans un repère.
- Ex. 2. Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 2v_n - 1$.
- Calculer les trois premiers termes de la suite.
 - Quel est le mode de génération de cette suite ?
- Ex. 3. Déterminer une relation explicite ou une relation de récurrence pour les suites définies par les motifs géométriques suivants. Pour chaque cas, on notera u_n le nombre d'éléments pour le rang n .
- Des carrés formés d'allumettes :



- Des triangles de points :



Suites arithmétiques et géométriques

- Ex. 4. Pour chacune des suites suivantes, préciser si elle est arithmétique, géométrique, ou ni l'un ni l'autre. Justifier votre réponse.
- $u_n = 3n - 2$
 - $v_n = 4 \times (0.5)^n$
 - $w_n = n^2 + 1$
 - t_n définie par $t_0 = 1$ et $t_{n+1} = t_n + 5$
- Ex. 5. Soit une suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 7$ et de raison $r = 3$.
- Calculer u_5 .
 - Exprimer u_n en fonction de n .
 - Déterminer le sens de variation de la suite.
- Ex. 6. Soit une suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $q = 1.5$.
- Calculer v_3 .
 - Exprimer v_n en fonction de n .
 - Déterminer le sens de variation de la suite.
- Ex. 7. Un capital initial de 1000 euros est placé à un taux d'intérêt annuel de 2%. On considère C_n le capital au bout de n années.
- Quelle est la nature de la suite (C_n) ? Justifier.
 - Exprimer C_n en fonction de n .
 - Quel sera le capital au bout de 10 ans ?
- Ex. 8. Calculer les sommes suivantes :
- $S_1 = 1 + 2 + \dots + 50$
 - $S_2 = 1 + 3 + 9 + \dots + 3^7$

- Ex. 9. Une association récolte des fonds. Le premier jour, elle récolte 100 €. Chaque jour, la somme récoltée augmente de 20 € par rapport à la veille.
- Modéliser cette situation par une suite (R_n) , où R_n représente la somme récoltée le n -ième jour.
 - Quelle est la nature de cette suite ? Donner sa raison et son premier terme.
 - Calculer la somme totale récoltée après 15 jours.
- Ex. 10. Une population de bactéries double toutes les heures. Au départ, il y a 100 bactéries.
- Modéliser cette situation par une suite (B_n) , où B_n représente le nombre de bactéries après n heures.
 - Quelle est la nature de cette suite ? Donner sa raison et son premier terme.
 - Quel est le nombre de bactéries après 8 heures ?
- Ex. 11. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n+1}$ pour $n \geq 0$.
- Calculer les premiers termes de la suite : u_0, u_1, u_2, u_3 .
 - Conjecturer le sens de variation de la suite.
 - Conjecturer la limite éventuelle de la suite.

Algorithmes et programmation sur les suites

- Ex. 12. Écrire un algorithme qui calcule le n -ième terme d'une suite arithmétique connaissant son premier terme u_0 et sa raison r .
- Ex. 13. Écrire un algorithme qui calcule la somme des n premiers termes d'une suite géométrique connaissant son premier terme v_0 et sa raison q .
- Ex. 14. On considère la suite définie par $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = 0.5u_n + 3$. Écrire un algorithme qui détermine le premier rang N tel que $u_N < 6.5$.

Équations, fonctions polynômes du second degré

Formes d'une fonction polynôme du second degré

- Ex. 1. Soit la fonction $f(x) = 2(x-1)(x+3)$.
- Déterminer les racines de $f(x)$.
 - Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- Ex. 2. Déterminer l'expression d'une fonction polynôme du second degré dont les racines sont -2 et 5.
- Ex. 3. Mettre sous forme canonique les fonctions polynômes du second degré suivantes :
- $f(x) = x^2 - 6x + 7$
 - $g(x) = 2x^2 + 8x + 10$
- Ex. 4. Pour chaque fonction polynôme du second degré, identifier la forme la plus adaptée pour répondre à la question posée, puis résoudre le problème.
- $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Résoudre $f(x) = 0$.
 - $g(x) = -x^2 + 6x - 9$. Déterminer le maximum de la fonction.
 - $h(x) = (x+2)(x-4)$. Étudier le signe de $h(x)$.

Résolution d'équations et inéquations du second degré

- Ex. 5. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:
- $x^2 - 5x + 6 = 0$
 - $3x^2 + 2x - 1 = 0$
 - $x^2 + 4 = 0$
 - $x^2 - 10x + 25 = 0$
- Ex. 6. Factoriser les fonctions polynômes du second degré suivantes, si possible :
- $f(x) = x^2 - 7x + 10$
 - $g(x) = 2x^2 + x - 3$
 - $h(x) = x^2 + 9$
- Ex. 7. Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:
- $x^2 - 3x - 4 \geq 0$
 - $-2x^2 + 5x - 2 < 0$

- Ex. 8. Un projectile est lancé en l'air. Sa hauteur $h(t)$ en mètres, en fonction du temps t en secondes, est donnée par $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$.
- a) À quel instant le projectile atteint-il sa hauteur maximale? Quelle est cette hauteur?
 - b) À quel instant le projectile retombe-t-il au sol (on arrondira à 0.01 près)?